Holzstiche
aus dem xylographischen Atelier
von Friedrich Vieweg und Sohn
in Braunschweig.

Papier
aus der mechanischen Papier-Fabrik
der Gebrüder Vieweg zu Wendhausen
bei Braunschweig.

Anfangsgründe

der

geometrischen Disciplinen

für

Gymnasien, Real- und Gewerbeschulen,

sowie auch

zum Selbstunterrichte bearbeitet

von

Dr. Joh. Müller,

Professor der Physik und Technologie an der Universität zu Freiburg im Breisgau.

In drei Theilen.

Mit zahlreichen in den Text eingedruckten Holzschnitten.

Dritter Theil:

Elemente der analytischen Geometrie

in der

Ebene und im Raum.

Braunschweig,

Druck und Verlag von Friedrich Vieweg und Sohn.

1 8 5 9.

Elemente

der

analytischen Geometrie

in der

Ebene und im Raum.

Für

Schulen und zum Selbstunterrichte bearbeitet

von

Dr. Joh. Müller,

Professor der Physik und Technologie an der Universität zu Freiburg im Breisgau.

Mit 90 in den Text eingedruckten Holzschnitten.

Braunschweig,

Druck und Verlag von Friedrich Vieweg und Sohn.

1859.

Vorrede.

Ein gründliches Studium der Naturwissenschaften, namentlich aber der Physik, ist, wie wohl allgemein anerkannt wird, ohne mathematische Vorkenntnisse ganz unmöglich, und von mancher Seite her hört man deshalb auch den Mangel derselben bitter beklagen. Da nun aber doch die Mathematik fast auf allen höheren Schulanstalten Deutschlands einen wesentlichen Theil des Lectionsplanes bildet, so kann der verhältnißmäßig geringe Erfolg des mathematischen Unterrichtes kaum in etwas Anderem gesucht werden, als in der unzweckmäßigen Art, wie derselbe häufig ertheilt wird.

Der Vortrag der mathematischen Disciplinen wird nämlich vielfach allzu abstract gehalten, was die nachtheilige Folge hat, daß er nicht nur für die Naturwissenschaften vollkommen unfruchtbar bleibt, sondern daß er auch bei den Schülern eine meist schwer zu überwindende Abneigung gegen das mathematische Studium hervorruft.

Auffallender Weise treffen diese Vorwürfe vorzugsweise den geometrischen Unterricht, während Arithmetik und Algebra sich meist eines weit besseren Erfolges zu erfreuen haben.

Die mathematischen Vorkenntnisse, deren man für ein gedeihliches Studium der Physik bedarf, sind, wenn es sich nicht gerade um die schwierigsten Fragen handelt, weder sehr umfangreich noch schwer zugänglich. Es bedarf nur verhältnißmäßig weniger aber klar verstandener Sätze, welche durch genügende Uebung vollkommen geistiges Eigenthum geworden sind. Dadurch ist nun der Weg bezeichnet, welcher beim mathematischen Unterrichte befolgt werden muß, wenn er fruchtbringend für Wissenschaft und Leben werden soll. Es handelt sich darum, die für den logischen Zusammenhang, für das Fortschreiten in höheren mathematischen Disciplinen und für die practische Anwendung unentbehrlichen Wahrheiten möglichst klar und verständlich zu entwickeln und durch geeignete

Beispiele gut einzuüben. Nirgends wirkt eine Ueberladung an Material und ein Verlieren in Specialitäten nachtheiliger als beim mathematischen Unterrichte.

In diesem Sinne habe ich es versucht, die wichtigsten geometrischen Disciplinen zu bearbeiten, und zwar in drei Theilen, nämlich:

1. Die Elemente der ebenen Geometrie und Stereometrie;
2. Die Elemente der ebenen und sphärischen Trigonometrie;
3. Die Elemente der analytischen Geometrie in der Ebene und im Raume;

welche zwar ein zusammengehöriges Ganzes bilden, von denen aber doch auch jeder einzelne Theil für sich bezogen werden kann.

Die beiden ersten Theile erscheinen gegenwärtig in zweiter Auflage. Die erste Auflage der ebenen Geometrie war im Jahre 1838, die erste Auflage der Trigonometrie war im Jahre 1839, freilich in etwas mangelhafter Ausstattung, zu Darmstadt erschienen. Die darin befolgte Methode hat sich bei dem geometrischen Unterrichte, welcher mir an der Realschule zu Gießen bis zu meiner Berufung nach Freiburg im Jahre 1844 übertragen war, vortrefflich bewährt, indem es mir namentlich gelang, den Schülern ein lebhaftes Interesse für den Gegenstand abzugewinnen und die erfreulichsten Fortschritte zu erzielen.

Es ist weder für ein weiteres Fortschreiten in der höheren Mathematik noch für praktische Anwendungen irgend einer Art genügend, daß man die geometrischen Wahrheiten einmal erkannt und verstanden hat; sie müssen durch erläuternde Beispiele, durch passende Uebungen zu einer lebendigen Anschauung erhoben werden, ohne welche eine freie Verwendung derselben für die Zwecke der Wissenschaft und des Lebens vollkommen unmöglich ist.

Während in dem vorliegenden Werkchen die Masse des Materials in dem oben angedeuteten Sinne auf das Nothwendigste beschränkt wurde, war ich bemüht, die vorgetragenen Lehren ausführlich genug zu entwickeln, um auch beim Selbstunterrichte zu einem vollkommen klaren Verständniß führen zu können, vorausgesetzt, daß der Leser alle Constructions- und Rechnungsbeispiele mit Sorgfalt und Genauigkeit ausführt.

Für eine lebendige Anschauung sind Constructionsaufgaben nach bestimmten Maaßen durchaus unentbehrlich, und deshalb habe ich sie auch in dem ganzen Werkchen von Anfang an durchgeführt. Nur durch solche Aufgaben wird es möglich, bei einem jeden Satze lange genug zu verweilen,

um ihn dem Gedächtniß gehörig einzuprägen und seine Bedeutung ins rechte Licht zu setzen. Gerade diese Constructionsaufgaben sind es auch, welche beim Unterrichte die rege Theilnahme des Schülers hervorrufen und dem Lehrer eine Controle darüber bieten, wie weit der Schüler in das Verständniß des fraglichen Satzes eingedrungen ist.

Beim Schulunterrichte müssen diese Aufgaben wenigstens theilweise nach einem größeren Maaßstabe auf der Tafel ausgeführt werden, wonach dann die übrigen dem häuslichen Fleiße überlassen bleiben können.

Ueber die einzelnen Theile bleiben nur noch wenige Bemerkungen zu machen übrig.

Ohne in Beziehung auf Tendenz und Methode etwas zu ändern, hat die zweite Auflage der Elemente der Geometrie namhafte Verbesserungen und eine wesentliche Ergänzung dadurch erfahren, daß die nothwendigsten Lehren der Stereometrie, welche in der ersten Auflage ganz fehlten, beigefügt wurden.

Ein besonderer Vorzug ist der neuen Auflage der Geometrie dadurch gesichert, daß die Figuren nicht allein ohne Vergleich besser und deutlicher, sondern auch weit zahlreicher sind, als in der ersten Auflage, was vorzugsweise daher rührt, daß ein großer Theil zum leichteren Verständniß wesentliche Figuren, welche in der ersten Auflage nur aus übergroßer Sparsamkeit weggeblieben waren, nun ihre Stelle gefunden haben.

Durch diese verbesserte Ausstattung, durch sorgfältige Ueberarbeitung des Textes und durch geeignete Ausfüllung mancher Lücken, welche bei der früheren Auflage lediglich dem mündlichen Unterrichte überlassen waren, hoffe ich das vorliegende Werkchen auch dem Selbstunterrichte zugänglich, so wie durch ein vollständiges Paragraphenregister und ein alphabetisches Inhaltsverzeichniß zur leichteren Orientirung und zum Nachschlagen geeigneter gemacht zu haben.

Zur Ausführung der Constructionsaufgaben ist ein Transporteur und ein Maaßstab nöthig. Um eine besondere Anschaffung derselben entbehrlich zu machen, sind den „Elementen der ebenen Geometrie" Abdrücke eines Transporteurs und einer Maaßstabstafel auf stärkerem Papier beigegeben worden.

Auch die Grundzüge der Trigonometrie erscheinen, wie schon bemerkt, in zweiter Auflage, zwar verbessert, aber ohne wesentliche Aenderung. Die trigonometrischen Functionen habe ich als Linien, als die Seiten rechtwinkeliger Dreiecke definirt, in welchen eine Seite der Längeneinheit gleich ist, weil diese Definition einfacher und anschaulicher ist als die

andere, nach welcher sie als Quotient zweier Dreiecksseiten bezeichnet werden. Die Linie ist ein geometrischer Begriff, der Quotient ist es nicht; deshalb glaubte ich die erstere Definition an die Spitze stellen, die letztere aber erst aus der Berechnung der Formeln rechtwinkeliger Dreiecke ableiten zu müssen.

Um dem Schüler nicht mit zwei Schwierigkeiten auf einmal entgegen zu treten, habe ich auch die Berechnung trigonometrischer Aufgaben im Anfang ohne Anwendung der Logarithmen durchgeführt und lasse die Benutzung der Logarithmen erst dann eintreten, wenn die Lehre von den trigonometrischen Functionen an und für sich klar und geläufig geworden ist. — Aus demselben Grunde habe ich auch die Formeln, welche zur Berechnung der fehlenden Stücke ebener und sphärischer Dreiecke dienen, erst vollständig aus der rein geometrischen Betrachtung entwickelt und erst später, ganz getrennt von dieser ersten Entwickelung, folgt die Umwandlung der Formeln, durch welche dieselben für logarithmische Rechnungen bequem gemacht werden.

Weil es im Anfang immerhin einige Schwierigkeiten hat, nach ebenen Figuren sich zu einer richtigen Anschauung räumlicher Verhältnisse zu erheben, habe ich der sphärischen Trigonometrie die Zeichnung der Netze beigefügt, aus welchen die den beiden Hauptfiguren dieser Abtheilung entsprechenden körperlichen Modelle leicht hergestellt werden können. Mit Hülfe dieser Modelle wird wohl das Verständniß der entsprechenden Entwickelungen keine Schwierigkeit mehr haben.

Der dritte Theil, die analytische Geometrie, erscheint zum ersten Male. Ich war bei Bearbeitung derselben bemüht, durch ausführlichere Besprechung concreter Fälle und durch Constructionsbeispiele nach gegebenen Zahlenwerthen die hier neu auftretenden Begriffe zugänglicher zu machen, als es gewöhnlich geschieht. Ich glaube namentlich auf diese Weise eine Brücke gebaut zu haben, welche den Leser über die Schwierigkeiten hinwegführt, die sich ihm meist beim Eintritt in das Studium der höheren geometrischen Disciplinen entgegenstellen.

Der analytischen Geometrie ist die Zeichnung des Netzes beigegeben, aus welchem man das körperliche Eck herstellen kann, welches durch die positiven Theile der drei Coordinatenebenen gebildet wird.

Freiburg, im Mai 1859.

J. Müller.

Inhaltsverzeichniß.

Erstes Buch.

Analytische Geometrie in der Ebene.

Erstes Kapitel.
Der Punkt und die gerade Linie in der Ebene.

Zweites Kapitel.
Vom Kreise.

Drittes Kapitel.
Die Ellipse.

Viertes Kapitel.
Die Parabel.

Fünftes Kapitel.
Die Hyperbel.

Sechstes Kapitel.
Transformation der Coordinaten.

Siebentes Kapitel.
Curven höherer Ordnung und transscendente Curven.

Zweites Buch.
Analytische Geometrie im Raum.

Erstes Kapitel.
Punkte, Linien und Oberflächen im Raum.

Zweites Kapitel.
Krumme Oberflächen.

Drittes Kapitel.
Durchschneidung krummer Oberflächen mit ebenen Flächen.

Erstes Buch.

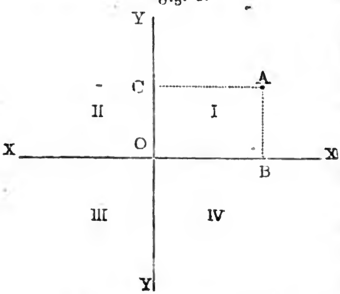
Analytische Geometrie in der Ebene.

Erstes Kapitel.

Der Punkt und die gerade Linie in der Ebene.

Bestimmung eines Punktes in der Ebene. Denken wir uns 1
in einer Ebene zwei zu einander rechtwinkelige, in O, Fig. 1, sich schneidende Linien XX und YY gezogen, so kann man die Lage irgend eines Punktes in der Ebene dadurch bestimmen, daß man seine Entfernung von jeder der beiden Linien angiebt.

Fig. 1.



Von dem Punkte A sei ein Perpendikel AB auf XX und eines AC auf YY gefällt, so ist $AB = OC$ der Abstand des Punktes A von XX, während $AC = OB$ der Abstand des Punktes A von YY ist.

Die Entfernungen eines Punktes von den Axen XX und YY werden seine Coordinaten, die Axen XX und YY selbst werden die Coordinatenaxen genannt.

Der Abstand eines Punktes von der Axe YY wird seine Abscisse und die horizontale Axe XX, nach deren Richtung die Abscissen gemessen werden, wird die Abscissenaxe genannt.

Die Abscissen werden mit x und demnach die Abscissenaxe als die Axe der x bezeichnet.

Dagegen wird der parallel mit YY gemessene Abstand eines Punktes von der Axe der x seine Ordinate genannt und mit y bezeichnet. Die Linie YY heißt deshalb auch die Ordinatenaxe oder die Axe der y.

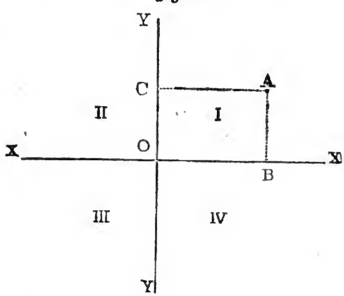
Die Abscisse des Punktes A, Fig. 1, ist 1,8 Centimeter, seine Ordinate ist $1{,}2^{cm}$; oder mit anderen Worten: für den Punkt A ist $x = 1{,}8^{cm}$ und $y = 1{,}2^{cm}$.

Um mit Hülfe der Ordinaten alle möglichen Lagen eines Punktes in der Ebene bezeichnen zu können, genügt es nicht, seine Abstände von den Coordinatenaxen anzugeben, man muß auch wissen, ob der Punkt rechts oder links von der Axe der y und ob er über oder unter der Axe der x liegt.

Gewöhnlich zählt man die positiven Werthe der Abscissen von O aus nach der rechten Seite; alsdann aber muß man alle von O nach links gemessenen Abscissen als negative bezeichnen. Ebenso werden die positiven Werthe von y nach oben, die negativen nach unten gemessen.

Demnach ist für den in Fig. 1 mit I bezeichneten Quadranten:

Fig. 1.



$x +$
$y +$.

Für den Quadranten II:

$x -$
$y +$.

Für den Quadranten III:

$x -$
$y -$.

Für den Quadranten IV:

$x +$
$y -$.

Nach diesen Erläuterungen ist es leicht, nachdem man auf einem Blatt Papier die rechtwinkeligen Coordinatenaxen gezogen hat, die folgenden Punkte aufzutragen.

$A \begin{cases} x = 1{,}5^{cm} \\ y = 3 \;\text{»} \end{cases}$ $\quad D \begin{cases} x = 3{,}2^{cm} \\ y = 0 \;\text{»} \end{cases}$

$B \begin{cases} x = 2{,}3^{cm} \\ y = 4 \;\text{»} \end{cases}$ $\quad E \begin{cases} x = -3^{cm} \\ y = -2 \;\text{»} \end{cases}$

$C \begin{cases} x = -3{,}4^{cm} \\ y = 2{,}5 \;\text{»} \end{cases}$ $\quad F \begin{cases} x = 4^{cm} \\ y = -1 \;\text{»} \end{cases}$

2 **Entfernung zweier Punkte, deren Coordinaten gegeben sind.** Es seien x' und y' die Coordinaten des Punktes A, Fig. 2, $x''y''$ die des Punktes B; man soll die Entfernung AB der beiden Punkte be-

stimmen. Fällt man von A ein Perpendikel AC auf die Ordinate des Punktes B, so ist offenbar

$$BC = y'' - y'$$
$$AC = x'' - x'.$$

Nun aber haben wir

$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$

oder

$$d^2 = (x'' - x')^2 + (y'' - y')^2,$$

wenn wir mit d den Abstand der beiden Punkte A und B bezeichnen, also

$$d = \sqrt{(x'' - x')^2 + (y'' - y')^2} \quad . \; . \; . \; . \quad (1)$$

So ist z. B. der Abstand der beiden mit A und B bezeichneten Punkte, deren Coordinaten am Schlusse des vorigen Paragraphen gegeben worden,

$$d = \sqrt{(2{,}3 - 1{,}5)^2 + (4 - 3)^2}$$
$$d = \sqrt{0{,}8^2 + 1^2} = \sqrt{1{,}64} = 1{,}28\,..$$

Für den Abstand der beiden Punkte B und C haben wir

$$d = \sqrt{(2{,}3 + 3{,}4)^2 + (4 - 2{,}5)^2}.$$

Wie groß ist der Abstand der Punkte C und D, der Punkte D und E, E und F u. s. w.?

Fig. 2.

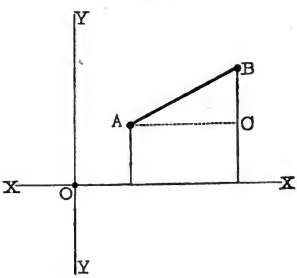
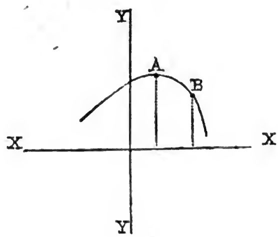


Fig. 3.



Gleichung der geraden Linie. Die Gesammtheit aller geometrischen Oerter, welche ein in Bewegung befindlicher Punkt durchläuft, wird eine **Linie** oder **Curve** genannt. 3

Wenn der bewegte Punkt stets in einer Ebene bleibt, so ist die von ihm beschriebene Curve eine **ebene**.

Geht man von einem Punkt A einer ebenen Curve, Fig. 3, zu

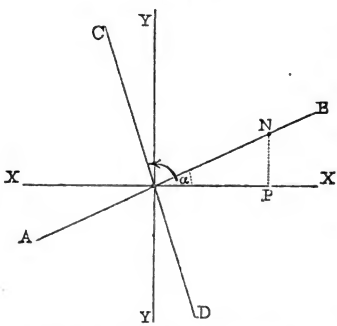
einem andern B über, so ändern sich gleichzeitig die zusammengehörigen Werthe von x und y und zwar nach einem bestimmten Gesetze, welches von der Natur der Curve abhängig ist.

Diese Abhängigkeit, welche zwischen x und y stattfindet, wenn die durch sie bestimmten Punkte stets auf einer gegebenen Curve liegen sollen, wird durch eine Gleichung zwischen den beiden Veränderlichen x und y ausgedrückt, welche man als Gleichung der Curve bezeichnet.

Kurz jede Gleichung mit zwei Veränderlichen x und y stellt eine Curve dar, wenn man die zusammengehörigen Werthe von x und y in der angedeuteten Weise als die Coordinaten eines Punktes betrachtet. Die Eigenschaften der Curve lassen sich dann durch Discussion der Gleichung ermitteln.

Betrachten wir zunächst die Gleichung der geraden Linie.

Fig. 4.



Denken wir uns in Fig. 4 eine gerade Linie AB durch den Anfangspunkt O der Coordinaten gezogen (in der Figur ist der Buchstabe O, welcher den Durchschnittspunkt der Coordinatenaxen bezeichnen soll, weggelassen), und von einem beliebigen Punkte N derselben ein Perpendikel NP auf die Abscissenaxe gefällt, so ist

$$NP = OP\ tang.\alpha,$$

wo wir auch den Punkt N auf der geraden Linie wählen mögen, wenn man mit α den Winkel bezeichnet, welchen AB mit dem positiven Arm der Abscissenaxe macht. Nun aber sind NP und OP die Coordinaten des Punktes N, wir haben also auch

$$y = x\,.\,tang.\alpha,$$

oder, wenn wir a für $tang.\alpha$ setzen,

$$y = \mathrm{a}x \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

und dies ist die Gleichung einer geraden Linie, welche durch den Anfangspunkt der Coordinaten geht und welche mit dem positiven Arme der Abscissenaxe einen Winkel macht, dessen trigonometrische Tangente gleich a ist.

Demnach ist

$$y = 0{,}3\,x$$

die Gleichung einer geraden Linie, welche mit dem positiven Arme der Abscissenaxe einen Winkel von $16^0\,32'$ macht. Ferner sind

$$y = x$$
$$y = 2x$$

die Gleichungen von Linien, welche mit der Abscissenaxe einen Winkel von 45^0 und von $63^0\,26'$ machen. $64^0\,26'$

So lange der Factor a in Gleichung (1) positiv bleibt, geht die durch diese Gleichung dargestellte gerade Linie durch den ersten und dritten Quadranten. Sobald aber die gerade Linie durch den zweiten und vierten Quadranten geht, wie CD, Fig. 4, muß der Factor a negativ werden, weil alsdann einem positiven x ein negatives y, und umgekehrt einem negativen x ein positives y entspricht. In diesem Falle ist auch der in der Richtung des Pfeils gezählte Winkel, welchen die Linie CD mit dem positiven Arm der Abscissenaxe macht, ein stumpfer, also *tang.* α negativ.

So ist z. B.:

$$y = -\,0{,}9\,x$$

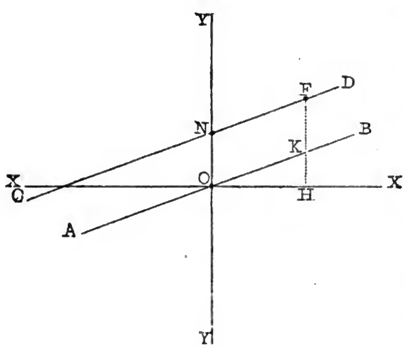
die Gleichung einer geraden Linie, welche mit dem positiven Arm der Axe der x einen Winkel von 139^0 macht.

Zur Uebung construire man folgende Linien:

1. $y = 0{,}7\,x$	4. $y = -\,0{,}4\,x$
2. $y = 1{,}3\,x$	5. $y = -\,1{,}8\,x$
3. $y = 3{,}358\,x$	6. $y = -\,2{,}4\,x.$

Durch einen Punkt N, Fig. 5, der Ordinatenaxe, dessen Abstand von O wir mit b bezeichnen wollen, sei eine gerade Linie CD parallel mit der durch den Anfangspunkt der Coordinaten gehenden Geraden AB gezogen, deren Gleichung ist $y = \mathrm{a}x$ ist. Es ist nun leicht, auch die Gleichung der Linie CD zu finden. Denken wir uns auf CD einen beliebigen Punkt F bezeichnet

Fig. 5.



und von ihm ein Perpendikel FH auf die Abscissenaxe gefällt, welches AB in K schneidet, so ist $FK = NO = b$, folglich $FH = HK + b$. Setzen wir nun $OH = x$ und $FH = y$, so haben wir offenbar

$$y = ax + b \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

für die Gleichung der geraden Linie CD.

Man construire folgende Linien, den für b gesetzten Zahlenwerth als Centimeter auftragend.

$$y = 0{,}7\,x + 2 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (a)$$

$$y = 1{,}3\,x - 1{,}5 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (b)$$

$$y = -\,1{,}8\,x - 3 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (c)$$

$$y = -\,0{,}7\,x + 0{,}6 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (d)$$

4 **Der Durchschnittspunkt zweier geraden Linien.** Es seien

$$\left.\begin{array}{l} y = ax + b \\ \text{und} \quad y = a'x + b' \end{array}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (A$$

die Gleichungen zweier geraden Linien, so sind die Coordinaten ihres Durchschnittspunktes offenbar diejenigen Werthe von x und y, welche zugleich beiden Gleichungen Genüge leisten. Für denjenigen Werth von y, welcher zugleich beiden Gleichungen Genüge leistet, haben wir

$$ax + b = a'x + b',$$

folglich

$$x = \frac{b' - b}{a - a'} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

und wenn man diesen Werth von x in eine der beiden Gleichungen bei (A) setzt,

$$y = \frac{ab' - ba'}{a - a'} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

Die nach den Gleichungen (3) und (4) berechneten Zahlenwerthe von x und y sind nun die Coordinaten des Punktes, in welchem sich die beiden Linien bei (A) einander schneiden.

So haben wir z. B. für den Durchschnittspunkt der beiden Linien (a) und (b) des vorigen Paragraphen

$$x = \frac{-\,1{,}5 - 2}{0{,}7 - 1{,}3} = \frac{3{,}5}{0{,}6} = 5{,}8$$

$$y = \frac{-\,1{,}05 - 2{,}6}{-\,0{,}6} = \frac{3{,}65}{0{,}6} = 6{,}09.$$

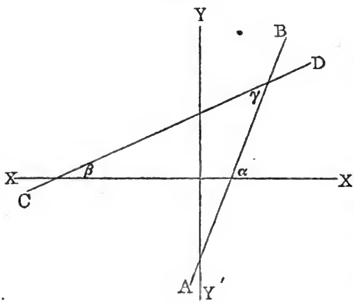
Welches sind die Coordinaten des Durchschnittspunktes der Linien (a) und (c), (a) und (d), (b) und (c) u. s. w.?

Der Winkel zweier geraden Linien. Bezeichnen wir mit α den Winkel, welchen die Linie AB, Fig. 6, mit β den Winkel, welchen die Linie CD mit der Axe der x macht, und mit γ den Winkel, unter welchem sich AB und CD schneiden, so ist $\gamma = \alpha - \beta$, also auch 5

$$tang.\gamma = \frac{tang.\alpha - tang.\beta}{1 + tang.\alpha\ tang.\beta} \ldots \text{(Trigon. S. 19).}$$

Ist nun $y = \mathrm{a}x + \mathrm{b}$ die Gleichung der Linie AB,
$y = \mathrm{a}'x + \mathrm{b}'$ „ „ „ „ CD,

Fig. 6.



so ist

$$tang.\alpha = \mathrm{a}$$
$$tang.\beta = \mathrm{a}',$$

folglich

$$tang.\gamma = \frac{\mathrm{a} - \mathrm{a}'}{1 + \mathrm{a}\mathrm{a}'} \quad (5)$$

Welchen Winkel machen die Linien (a) und (b), §. 3, mit einander? Welchen (a) und (c), (a) und (d) u. s. w.?

Sollen die beiden Linien einander parallel sein, so muß $tang.\gamma = 0$, also $\mathrm{a} - \mathrm{a}' = 0$ oder $\mathrm{a} = \mathrm{a}'$ sein.

Sollen die beiden Linien rechtwinkelig auf einander stehen, so muß $tang.\gamma = \infty$ oder es muß der Nenner des Werthes von γ gleich Null sein, also

$$1 + \mathrm{a}\mathrm{a}' = 0,$$

oder

$$\mathrm{a}' = -\frac{1}{\mathrm{a}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Zwei gerade Linien schneiden sich unter einem rechten Winkel, wenn der Factor von x in der Gleichung der einen gleich ist dem negativen reciproken Werth des Factors von x in der Gleichung der andern. Die Gleichung einer Linie, welche rechtwinkelig auf

$$y = 0{,}7\,x + b$$

stehen soll, ist also

$$y = -\frac{1}{0{,}7}\,x + b'$$

oder
$$y = -1{,}428\,x + b'.$$

Wie groß ist der Factor von x in der Gleichung einer geraden Linie, welche rechtwinkelig steht auf der Linie (a), §. 3, auf der Linie (b), auf (c) u. s. w.?

6 **Die Gleichung einer geraden Linie, welche durch einen gegebenen Punkt geht.** Wenn die durch Gleichung (2) bezeichnete Linie durch einen gegebenen Punkt gehen soll, dessen Coordinaten x' und y' sind, so muß man diese speciellen Werthe x' und y' an die Stelle der entsprechenden Variablen in Gleichung (2) setzen können, wir haben also
$$y' = \mathrm{a}x' + \mathrm{b}$$
und daraus
$$\mathrm{b} = y' - \mathrm{a}x'.$$

Die Gleichung einer geraden Linie, welche durch den Punkt $x'y'$ geht, ist also
$$y - y' = \mathrm{a}\,(x - x') \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$
Für den Fall, daß $y' = 0$, geht diese Gleichung über in
$$y = \mathrm{a}\,(x - x') \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$
und dies ist die Gleichung einer geraden Linie, welche durch einen auf der Abscissenaxe liegenden um die Länge x' vom Anfangspunkt der Coordinaten entfernten Punkt geht.

7 **Gleichung einer Linie, welche durch zwei gegebene Punkte geht.** Es seien x' und y' die Coordinaten des einen, x'' und y'' die Coordinaten des andern Punktes, so müssen sowohl die Coordinaten des einen als auch die Coordinaten des andern Punktes in die Gleichung (2) der geraden Linie passen, wir haben also
$$y' = \mathrm{a}x' + \mathrm{b}$$
$$y'' = \mathrm{a}x'' + \mathrm{b}.$$

Zieht man die letzte Gleichung von der ersten ab, so folgt
$$y' - y'' = \mathrm{a}\,(x' - x'')$$
oder
$$\mathrm{a} = \frac{y' - y''}{x' - x''}.$$

Die gesuchte Gleichung ist also
$$y - y' = \frac{y' - y''}{x' - x''}\,(x - x') \quad \ldots\ldots \quad (9)$$

Welches ist die Gleichung einer geraden Linie, welche durch die Punkte A und B, B und C, C und D u. s. w., §. 1, geht?

Zweites Kapitel.

Vom Kreise.

Gleichung des Kreises. Der Mittelpunkt des Kreises, Fig. 7, 8 sei zugleich der Anfangspunkt der Coordinaten. Von einem beliebigen Punkte F des Kreisumfanges sei ein Perpendikel FH auf die Abscissenaxe gefällt, so ist

$$OH^2 + FH^2 = OF^2$$

oder

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

wenn wir mit r den Radius des Kreises, mit x die Abscisse und mit y die Ordinaten des Punktes F bezeichnen. Diese Gleichung (1) ist die Gleichung eines Kreises, dessen Mittelpunkt mit dem Durchschnittspunkt der Coordinatenaxen zusammenfällt.

Ist der Mittelpunkt des Kreises nicht zugleich der Anfangspunkt der Coordinaten, so nimmt die Gleichung des Kreises eine andere Gestalt an, welche leicht zu entwickeln ist.

Fig. 7.

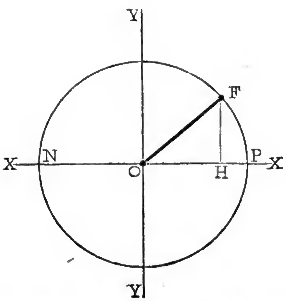
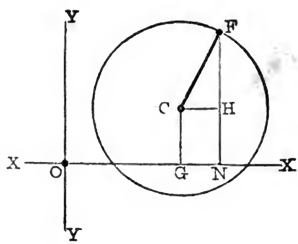


Fig. 8.



Es sei O, Fig. 8, der Anfangspunkt der Coordinaten, C der Mittelpunkt des Kreises, dessen Abscisse OG mit a und dessen Ordinate GC mit b bezeichnet werden mag. Ist nun F irgend ein Punkt des Kreisumfanges, ON die Abscisse x, NF die Ordinate y desselben und CH

ein vom Mittelpunkt des Kreises auf diese Ordinate gefälltes Perpendikel, so ist offenbar

$$CH^2 + FH^2 = OF^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (A)$$

Es ist aber

$$CH = ON - OG = x - a$$
$$FH = FN - NH = FN - GC = y - b.$$

Setzt man diese Werthe von CH und FH in Gleichung (A), so kommt

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

Fig. 8.

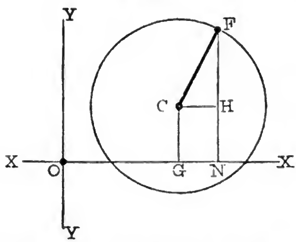
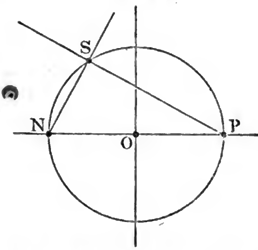


Fig. 9.



wenn CF, der Radius des Kreises, mit r bezeichnet wird, und diese Gleichung (2) ist die Gleichung eines Kreises, dessen Radius r ist und dessen Mittelpunkt a zur Abscisse und b zur Ordinate hat.

Aus der Gleichung (1) lassen sich nun sehr einfach mehrere schon aus der Elementargeometrie bekannte Sätze vom Kreis ableiten.

A. Aus Gleichung (1) folgt

$$y^2 = r^2 - x^2$$
$$y^2 = (r + x)\,(r - x).$$

Die Ordinate y ist also die mittlere Proportionale zwischen $(r + x)$ und $(r - x)$ oder mit andern Worten: Wenn man in einem Punkte H, Fig. 7, eines Kreisdurchmessers ein Perpendikel errichtet, so ist das zwischen dem Punkte H und dem Kreisumfang liegende Stück HF dieses Perpendikels die mittlere Proportionale zwischen den beiden Stücken NH und HP, in welche der Durchmesser durch den Punkt H getheilt wird.

B. Die Gleichung einer geraden Linie, welche durch den Punkt N, Fig. 9, geht, ist (§. 6)

$$y = a\,(x + r) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

Die Gleichung einer geraden Linie, welche durch den Punkt P geht, ist

$$y = a'\,(x - r) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

Soll der Durchschnittspunkt dieser beiden Linien auf dem Umfang des Kreises liegen, so müssen die Werthe von x und y, welche zugleich den Gleichungen (3) und (4) genügen, auch noch der Gleichung des Kreises (Gleichung 1) Genüge leisten. Durch Multiplication von (3) und (4) erhält man:

$$y^2 = aa' (x^2 - r^2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Nach Gleichung (1) ist aber

$$y^2 = r^2 - x^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Mit denselben Werthen von x und y kann aber nur dann zugleich den Gleichungen (5) und (6) Genüge geleistet werden, wenn

$$aa' = -1$$

oder wenn

$$a' = -\frac{1}{a},$$

d. h. wenn der Durchschnittspunkt zweier durch die Endpunkte N und P eines Kreisdurchmessers gezogener Linien auf dem Kreisumfang liegen soll, so müssen sich die beiden Linien unter rechtem Winkel schneiden (§. 5).

Die Kreistangente. Eine gerade Linie 9

$$y = ax + b \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

wird einen Kreis

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

im Allgemeinen in zwei Punkten schneiden, deren Coordinaten man durch Elimination aus den Gleichungen (7) und (8) findet. Setzt man den Werth von y aus Gleichung (7) in Gleichung (8), so erhält man nach einigen Umformungen

$$x = \frac{ab}{1 + a} \pm \sqrt{\frac{a^2 b^2}{(1 + a^2)^2} + \frac{r^2 - b^2}{1 + a^2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Wenn nun aber die gerade Linie bei (7) den Kreis nur in einem einzigen Punkte treffen soll, so müssen die beiden Werthe von x in Gleichung (9) in einen einzigen zusammenfallen, der unter dem Wurzelzeichen stehende Ausdruck muß also verschwinden. Setzt man aber den unter dem Wurzelzeichen stehenden Ausdruck gleich Null, so ergiebt sich

$$b^2 = r^2 (1 + a^2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Bezeichnen wir mit x' und y' die Coordinaten des Berührungspunktes, so ist die Gleichung einer jeden durch diesen Punkt gehenden geraden Linie (Gleichung 7, Seite 10)

$$y - y' = a (x - x')$$

oder

$$y = ax + y' - ax' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Für den Werth von b in Gleichung (7) haben wir also
$$b = y' - ax'.$$
Setzt man das Quadrat dieses Werthes gleich dem Werthe von b^2 in Gleichung (10), nachdem man in demselben für r^2 seinen Werth $x'^2 + y'^2$ substituirt hat, so ergiebt sich nach einigen Umformungen
$$a = -\frac{x'}{y'}.$$
Setzt man diesen Werth von a in Gleichung (10), so erhält man als Gleichung der geraden Linie, welche den Kreis in den Punkten x' und y' berührt,
$$y - y' = -\frac{x'}{y'}(x - x') \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$
Diese Gleichung der Kreistangente läßt sich noch etwas umformen; multiplicirt man auf beiden Seiten mit y', substituirt man alsdann r^2 für $x'^2 + y'^2$, so erhält man die Gleichung
$$yy' + xx' = r^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$
welche ebenfalls die Gleichung einer Tangente ist, welche den Kreis, Gleichung (8), in dem Punkte berührt, dessen Coordinaten x' und y' sind.

Die Gleichung eines Radius im Kreise, Gleichung (8), welcher durch den Berührungspunkt $x'y'$ geht, erhalten wir, wenn wir in Gleichung (9), §. 7, $x'' = 0$ und $y'' = 0$ setzen; es ergiebt sich alsdann
$$y - y' = \frac{y'}{x'}(x - x') \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$
Die durch Gleichung (14) repräsentirte Linie steht aber rechtwinkelig auf der durch Gleichung (12) dargestellten, weil der Factor von x in Gleichung (12) gleich ist dem negativen reciproken Werthe des Factors von x in Gleichung (14) (siehe §. 5) oder mit andern Worten: **Die Tangente steht rechtwinkelig auf dem vom Berührungspunkte zum Mittelpunkte des Kreises gezogenen Radius.**

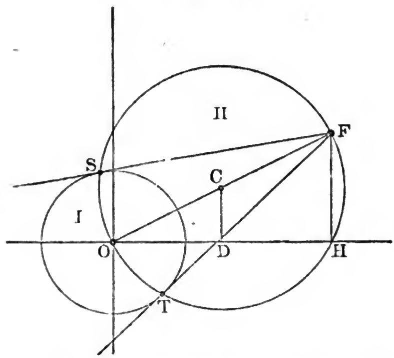
Aufgabe. An einen Kreis durch einen außerhalb desselben gelegenen Punkt eine Tangente zu ziehen.

Nehmen wir den Mittelpunkt O des gegebenen Kreises I, Fig. 10, zum Anfangspunkt der Coordinaten, so ist seine Gleichung
$$x^2 + y^2 = r^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$
In Fig. 10 sei F der Punkt, durch welchen eine Tangente an den Kreis I gezogen werden soll; seine Abscisse OH wollen wir mit m seine Ordinate FH wollen wir mit n bezeichnen.

Nach dem vorigen Paragraphen ist die Gleichung einer Tangente an den Kreis I

$$xx' + yy' = r^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (b)$$

Fig. 10.



wenn x' und y' die Coordinaten des Berührungspunktes bezeichnen, welche außerdem noch der Gleichung

$$x'^2 + y'^2 = r^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (c)$$

Genüge leisten müssen. Soll die Linie Gleichung (b) durch den Punkt F gehen, dessen Coordinaten m und n sind, so muß man in Gleichung (b) auch m für x und n für y setzen können, wir haben also

$$mx' + ny' = r^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (d)$$

Die Werthe von x' und y', welche den Gleichungen (c) und (d) zugleich Genüge leisten, also die Coordinaten des Berührungspunktes, könnte man einfach durch Elimination aus diesen Gleichungen (c) und (d) berechnen, wir wollen jedoch die Lösung auf anderem Wege versuchen.

Die Werthe von x' und y', welche den Gleichungen (c) und (d) Genüge leisten, müssen offenbar auch in eine jede Gleichung passen, welche man durch eine Combination der Gleichungen (c) und (d) erhalten kann. Zieht man Gleichung (d) von Gleichung (c) ab, so bleibt

$$x'^2 - mx' + y'^2 - ny' = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (e)$$

Addirt man auf jeder Seite des Gleichheitszeichens dieselbe Größe $\frac{1}{4}m^2 + \frac{1}{4}n^2$, so kommt

$$x'^2 - mx' + \tfrac{1}{4}m^2 + y'^2 - ny' + \tfrac{1}{4}n^2 = \tfrac{1}{4}m^2 + \tfrac{1}{4}n^2$$

oder

$$(x' - \tfrac{1}{2}m)^2 + (y' - \tfrac{1}{2}n)^2 = \tfrac{1}{4}m^2 + \tfrac{1}{4}n^2 \quad . \quad . \quad . \quad (f)$$

Diese Gleichung (f) nun ist, wenn wir x' und y' als Variabele betrachten, die Gleichung eines Kreises, dessen Radius $\sqrt{\tfrac{1}{4}m^2 + \tfrac{1}{4}n^2}$ ist, während die Coordinaten seines Mittelpunktes $\tfrac{1}{2}m$ und $\tfrac{1}{2}n$ sind.

Der gesuchte Berührungspunkt muß also auf dem Umfang dieses durch Gleichung (f) dargestellten Kreises liegen, den wir als den Kreis II bezeichnen wollen, er liegt also offenbar auf dem Durchschnittspunkte der Kreise I und II.

Um den Kreis II zu construiren, ziehe man die Linie OF, halbire dieselbe und ziehe um den Halbirungspunkt C einen Kreis mit dem Halbmesser CO.

Daß der so gezogene Kreis wirklich der durch Gleichung (f) dargestellte ist, ist leicht einzusehen, denn es ist $OD = \tfrac{1}{2}OH = \tfrac{1}{2}m$, $CD = \tfrac{1}{2}HF = \tfrac{1}{2}n$ und $OC^2 = OD^2 + DC^2 = (\tfrac{1}{2}m)^2 + (\tfrac{1}{2}n)^2$.

Da die Kreise I und II sich in zwei Punkten schneiden, so kann man von dem Punkte F zwei Tangenten an den Kreis I ziehen.

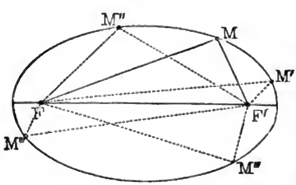
Drittes Kapitel.

Die Ellipse.

---

10 **Definition der Ellipse.** Die Ellipse ist eine ebene Curve, welche die Eigenschaft hat, daß für jeden Punkt M (Fig. 11) derselben, die Summe der Abstände MF und MF' von zwei festen Punkten F und F' stets einer constanten Größe gleich ist.

Fig. 11.



Sind also M', M'', M''', Fig. 11, weitere Punkte derselben Ellipse, so ist $MF + MF' = M'F + M'F' = M''F + M''F' = M'''F + M'''F'$ u. s. w.

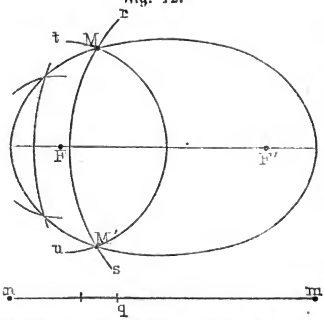
Die beiden Punkte F und F' führen den Namen der **Brennpunkte**. Eine von irgend einem Punkte M der Ellipse nach einem Brennpunkt gezogene Linie MF oder MF' wird ein **Leitstrahl**, radius vector, genannt. Für jeden Punkt der Ellipse giebt es also zwei Leitstrahlen und die Summe dieser beiden Leitstrahlen ist nach obiger Definition eine constante Größe.

Eine Ellipse ist bestimmt, wenn die Lage der beiden Brennpunkte und die Summe zweier zusammengehörigen Leitstrahlen gegeben ist, und kann nach diesen Daten construirt werden, wie durch folgendes Beispiel erläutert wird.

Aufgabe. Es sei eine Ellipse zu construiren, deren Brennpunkte 3,4 Centimeter von einander abstehen und für welche die Summe zweier zusammengehörigen Leitstrahlen gleich 5 Centimetern ist.

Auflösung. Auf einer geraden Linie trage man die beiden (in unserem Beispiel 3,4 Centimeter von einander entfernten) Brennpunkte F und F', Fig. 12, auf.

Fig. 12.



Auf einer benachbarten Linie schneide man ein Stück mn ab, welches der gegebenen Summe der beiden zusammengehörigen Leitstrahlen (in unserem Falle 5 Centimeter) gleich ist.

Nachdem dies geschehen ist, beschreibe man um den einen Brennpunkt F' einen Kreisbogen rs mit irgend einem Halbmesser, welcher kleiner ist als mn, schneide auf mn ein Stück mq ab, welches diesem Radius gleich ist, und beschreibe endlich mit dem Rest nq um den zweiten Brennpunkt F einen Kreisbogen tu. Die beiden Punkte M und M', in welchen sich diese beiden Kreisbogen schneiden, sind dann zwei **Punkte der Ellipse**.

Auf gleiche Weise kann man nun noch beliebig viele Punkte der Ellipse bestimmen und über sie alsdann die Curve ziehen.

Zur Uebung construire man **vier** Ellipsen, für welche sämmtlich die Summe zweier zusammengehörigen Leitstrahlen 6 Centimeter ist; dagegen betrage der Abstand der beiden Brennpunkte:

für die erste	5	Centimeter
» » zweite	4	»
» » dritte	3	»
» » vierte	2	»

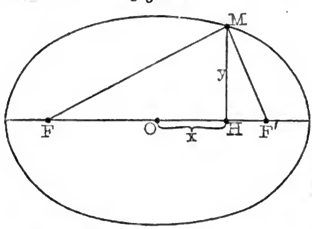
Nach Ausführung dieser Aufgaben wird man leicht übersehen, daß die Gestalt der Ellipse sich einem Kreise um so mehr nähert, je näher bei unveränderter Summe der zusammengehörigen Leitstrahlen die beiden Brennpunkte einander stehen.

Der Kreis ist eine Ellipse, für welche der Abstand der beiden Brennpunkte gleich Null geworden ist.

Aus der obigen Definition der Ellipse ergiebt sich auch ein mechanisches Verfahren, eine Ellipse in etwas größerem Maaßstabe etwa auf einer Tafel zu ziehen. Man schlägt an jede der beiden Stellen, welche die Brennpunkte der Ellipse werden sollen, einen Stift ein, befestigt an diesen Stiften die Enden einer Schnur, deren Länge gleich ist der Länge der beiden Leitstrahlen, spannt die Schnur mittelst eines Stiftes und bewegt dann den Stift in der Weise fort, daß die Schnur stets gespannt bleibt. Der Weg, welchen auf diese Weise die Spitze des Stiftes beschreibt, ist eine Ellipse.

11 **Gleichung der Ellipse.** Aus der im vorigen Paragraphen gegebenen Definition der Ellipse läßt sich nun auch die Gleichung derselben ableiten. Nehmen wir die Verbindungslinie der beiden Brennpunkte F und F', Fig. 13, zur Abscissenaxe, und den Punkt O, welcher in der Mitte zwischen F und F' liegt, zum Anfangspunkt der Coordinaten, so haben wir für den Punkt M die Coordinaten

Fig. 13.



$$OH = x$$
$$MH = y.$$

Es sei nun ferner

$$FM = l$$
$$F'M = l'$$
$$OF = OF' = E,$$

so haben wir

$$l^2 = (E + x)^2 + y^2 \quad . \quad . \quad (1)$$
$$l'^2 = (E - x)^2 + y^2 \quad . \quad . \quad (2)$$

Bezeichnen wir nun ferner die Summe zweier zusammengehörigen Leitstrahlen mit $2A$, so haben wir ferner

$$l + l' = 2A \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

und aus diesen drei Gleichungen kann man durch Elimination von l und l' eine Gleichung zwischen den Veränderlichen x und y ableiten, welche die gesuchte Gleichung der Ellipse ist.

Ziehen wir Gleichung (2) von Gleichung (1) ab, so kommt

$$l^2 - l'^2 = (E + x)^2 - (E - x)^2$$

$$(l + l')(l - l') = 4Ex$$

$$2A(l - l') = 4Ex$$

$$(l - l') = \frac{2Ex}{A}.$$

Aus dieser Gleichung ergiebt sich

$$l^2 - 2ll' + l'^2 = 4\frac{E^2x^2}{A^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Aus Gleichung (3) folgt

$$l^2 + 2ll' + l'^2 = 4A^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Addirt man die beiden Gleichungen (4) und (5), so kommt, wenn man auf beiden Seiten durch 2 dividirt,

$$l^2 + l'^2 = 2\left(\frac{E^2x^2}{A^2} + A^2\right);$$

durch Addition der Gleichungen (1) und (2) kommt aber

$$l^2 + l'^2 = 2(E^2 + x^2 + y^2),$$

also ist

$$\frac{E^2x^2}{A^2} + A^2 = E^2 + x^2 + y^2.$$

Setzen wir in dieser letzten Gleichung $A^2 - B^2$ an die Stelle von E^2, so ergiebt sich nach einigen Reductionen

$$A^2y^2 + B^2x^2 = A^2B^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

als die gesuchte Gleichung der Ellipse.

Die Hauptaxen der Ellipse. Um die Durchschnittspunkte der 12
Ellipse mit der Abscissenaxe zu finden, haben wir in Gleichung (6) nur $y = 0$ zu setzen; wir erhalten alsdann

$$x = \pm A.$$

Die durch die beiden Brennpunkte gelegte Abscissenaxe schneidet also die Ellipse in zwei Punkten R und S, Fig. 14 (a. f. S.), welche um die Länge A vom Mittelpunkt O der Curve abstehen.

Die Länge $RS = 2A$ ist die große Axe der Ellipse. Da die Summe zweier zusammengehörigen Leitstrahlen gleich $2A$ ist, so kann

man auch sagen, daß die Summe zweier zusammengehörigen Leitstrahlen der Ellipse gleich ist der großen Axe derselben.

Setzen wir in Gleichung (6) $x = 0$, so erhalten wir für die Durchschnittspunkte M und N, Fig. 14, der Ellipse mit der Ordinatenaxe

$$y = \pm B.$$

Der Abstand $2B$ der beiden Punkte M und N wird die kleine Axe der Ellipse genannt.

Da $FM = F'M$ und $FM + F'M = 2A$, so ist auch $FM = A$.

Wir haben oben angenommen, daß

$$E^2 = A^2 - B^2,$$

und in der That ist E die eine Kathete FO des rechtwinkeligen Dreiecks FOM, dessen Hypotenuse gleich A und dessen andere Kathete gleich B ist.

Der Abstand FO eines Brennpunktes von dem Mittelpunkt der Ellipse wird die Excentricität derselben genannt.

Fig. 14.

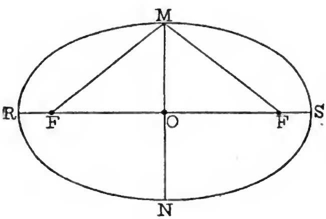
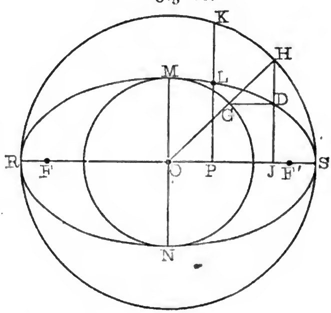


Fig. 15.



13 **Verhältniss der Ellipse zu einem über ihrer grossen Axe beschriebenen Kreise.** Aus Gleichung (6) ergiebt sich:

$$y = \pm \frac{B}{A} \sqrt{A^2 - x^2}.$$

Wenn nun um den Mittelpunkt O einer Ellipse, Fig. 15, ein Kreis RKS gezogen wird, dessen Radius gleich ist der halben großen Axe der Ellipse, so ist seine Gleichung

$$Y^2 + X^2 = A^2,$$

wenn wir die Coordinaten des Kreises zum Unterschiede von denen der Ellipse durch große Buchstaben bezeichnen, und also

$$Y = \sqrt{A^2 - X^2}.$$

Setzen wir $X = x$, so haben wir

$$y : Y = \frac{B}{A} : 1$$

oder

$$y : Y = B : A,$$

d. h. die zu einer und derselben Abscisse gehörigen Ordinaten der Ellipse und des Kreises verhalten sich zu einander, wie die kleine Axe der Ellipse zu der großen.

Errichtet man also z. B. in P, Fig. 15, ein Perpendikel auf die große Axe, welches in L die Ellipse, in K den Kreis schneidet, so ist

$$PL : PK = B : A.$$

Darauf gründet sich ein weiteres Verfahren, eine Ellipse zu construiren, wenn die große und die kleine Axe derselben gegeben sind. Man beschreibe um den Punkt O, welcher der Mittelpunkt der zu construirenden Ellipse werden soll, zwei Kreise, den einen mit der kleinen, den andern mit der großen Axe als Halbmesser. Von irgend einem Punkte H des äußeren Kreises fälle man ein Perpendikel HJ auf die Linie, welche die große Axe der Ellipse werden soll, und ziehe den Radius HO; von dem Punkte G, in welchem dieser Radius den kleinen Kreis schneidet, fälle man ferner ein Perpendikel auf HJ, so ist der Fußpunkt D dieses Perpendikels ein Punkt der Ellipse, da

$$JD : JH = OG : OH$$

und also auch

$$JD : JH = B : A,$$

da ja $OG = B$ und $OH = A$.

Nach demselben Verfahren kann man nun so viel Punkte der Ellipse suchen, als nöthig sind, um die Curve mit Sicherheit ziehen zu können.

Zur Uebung construire man nach dieser Methode vier Ellipsen, deren große Axe für alle 8 Centimeter ist, während die kleine Axe

für die erste	7	Centimeter
» » zweite	5	»
» » dritte	4	»
» » vierte	3	»

beträgt.

Wie groß ist die Excentricität für jede dieser vier Ellipsen?

Die Ellipsentangente. Auf ähnliche Weise wie in §. 9 die Gleichung der Kreistangente entwickelt wurde, ließe sich nun auch die 14

Gleichung der geraden Linie ermitteln, welche eine Ellipse in einem gegebenen Punkte berührt. Da aber die Ausführung dieses Verfahrens ziemlich weitläufige Rechnungen erfordert, so wollen wir lieber sogleich eine allgemeine Methode entwickeln, nach welcher sich die Gleichung einer Tangente an irgend eine Curve, deren Gleichung gegeben ist, weit einfacher finden läßt.

Wenn die Gleichung einer Curve gegeben ist, so kann man dieselbe stets in solche Form bringen, daß y als Function von x ausgedrückt ist; so ergiebt sich z. B. aus der Gleichung eines Kreises, dessen Mittelpunkt mit dem Anfangspunkt der Coordinaten zusammenfällt,

$$y = \sqrt{r^2 - x^2} = (r^2 - x^2)^{1/2}.$$

Aus der Gleichung der Ellipse erhält man

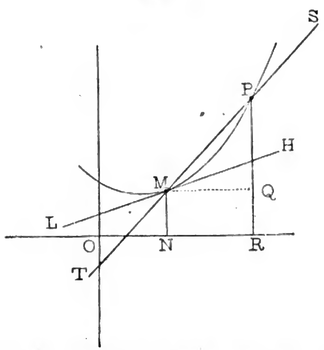
$$y = \frac{B}{A}(A^2 - x^2)^{1/2}$$

u. s. w. oder allgemein ist

$$y = f(x)$$

wo durch das Zeichen $f(x)$ ausgedrückt sein soll, daß y eine Function von x, d. h. eine irgend wie von x abhängige Größe sein soll.

Fig. 16



Es stelle nun Fig. 16 die Curve dar, welche der Gleichung $y = f(x)$ entspricht; ferner seien x' und y' die Coordinaten eines bestimmten Punktes M der Curve, so haben wir auch

$$y' = f(x') \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Wenn nun x' (d. h. die Abscisse ON des Curvenpunktes M) um ein Stück $NR = h$ wächst, so ist nun die der Abscisse OR entsprechende Ordinate $RP = RQ + QP = y' + k$. Da nun aber P auch ein Punkt der Curve sein soll, haben wir auch

$$y' + k = f(x' + h).$$

Es läßt sich nun $f(x' + h)$ stets in einer nach steigenden Potenzen von h fortschreitenden Reihe entwickeln, was in vielen Fällen schon auf

ganz elementarem Wege möglich ist. Im Allgemeinen sind die Factoren der aufeinander folgenden Potenzen von h wieder Functionen von x', die wir der Reihe nach mit $f'(x')$, $f''(x')$, $f'''(x')$ u. s. w. bezeichnen wollen; wir haben also

$$y' + k = f(x') + f'(x')h + f''(x')h^2 + f'''(x')h^3 +$$

Ziehen wir von dieser Gleichung die Gleichung (1) ab, so bleibt

$$k = f'(x')h + f''(x')h^2 + f'''(x')h^3 +$$

woraus folgt

$$\frac{k}{h} = f'(x') + f''(x')h + f'''(x')h^2 + \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Der Quotient $\frac{k}{h}$ ist aber (da $k = PQ$ und $h = MQ$) nichts anderes als die trigonometrische Tangente des Winkels, welchen die durch die beiden Curvenpunkte M und P gelegte Secante TS mit MQ oder mit der Abscissenaxe macht. Denken wir uns nun, daß h kleiner und kleiner wird, so rückt der Punkt P näher und näher an den Punkt M heran, um mit ihm ganz zusammenzufallen, wenn $h = 0$ wird. Für den Fall aber, daß P mit M zusammenfällt, geht aber die durch M und P gelegte Secante in eine Tangente über, welche die Curve in M berührt.

Betrachten wir den Werth des Quotienten $\frac{k}{h}$ in Gleichung (2), so ist klar, daß die mit h multiplicirten Glieder der Reihe um so kleiner werden, je kleiner h wird; für $h = 0$ reducirt sich aber der Werth jenes Quotienten auf $f'(x')$ und dieser Grenzwerth des Quotienten $\frac{k}{h}$, welchem sich derselbe um so mehr nähert, je kleiner h wird, ist natürlich die trigonometrische Tangente des Winkels, welchen die in M die Curve berührende Gerade LH mit der Abscissenaxe macht.

Suchen wir dies durch ein Beispiel zu erläutern. Die Gleichung einer Curve sei

$$y = m + nx^3.$$

Sind x' und y' die Coordinaten eines bestimmten Punktes der Curve, so ist auch

$$y' = m + nx'^3.$$

Sind $x' + h$ und $y' + k$ die Coordinaten eines zweiten Punktes der Curve, so ist auch

$$y' + k = m + n(x' + h)^3$$
$$y' + k = m + nx'^3 + 3nx'^2h + 3nxh^2 + nh^3,$$

also auch

$$k = 3nx'^2h + 3nx'h^2 + nh^3$$

und

$$\frac{k}{h} = 3nx'^2 + 3nx'h + nh^2.$$

Der Grenzwerth, dem sich $\frac{k}{h}$ um so mehr nähert, je kleiner h wird, ist also in diesem Falle gleich $3nx'^2$, und dies ist die trigonometrische Tangente des Winkels, welchen die in $x'y'$ (d. h. in dem Punkte dessen Coordinaten x' und y' sind) die Curve berührende Gerade mit der Abscissenaxe macht. Die Gleichung dieser Berührenden ist demnach

$$y - y' = 3nx'^2(x - x'),$$

da wir in Gleichung (7) Seite 10 für a den Factor $3nx'^2$ zu setzen haben.

Wenden wir nun diese Methode auf die Bestimmung der Kreistangente an. Sind x' und y' die Coordinaten des Berührungspunktes, so haben wir

$$y' = (r^2 - x'^2)^{1/2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Setzen wir $y' + k$ für y' und $x' + h$ für h, so kommt

$$y' + k = [r^2 - (x' + h)^2]^{1/2} = (r^2 - x'^2 - 2x'h - h^2)^{1/2}.$$

Setzen wir $r^2 - x'^2 = z$ und $2x'h + h^2 = v$, so ist

$$y' + k = (z - v)^{1/2} = z^{1/2} - {}^1/_2 z^{-1/2}v + \ldots$$

wenn man $(z - v)^{1/2}$ nach dem binomischen Lehrsatz entwickelt und nicht über die erste Potenz von v hinausgeht; werden nun für z und v wieder ihre alten Werthe substituirt, so ergiebt sich

$$y' + k = (r^2 - x'^2)^{1/2} - {}^1/_2 (r^2 - x'^2)^{-1/2} (2x'h + h^2)$$

$$y' + k = \sqrt{r^2 - x'^2} - \frac{x'h}{\sqrt{r^2 - x'^2}} - {}^1/_2 \frac{h^2}{\sqrt{r^2 - x'^2}} \quad . \quad . \quad (4)$$

Wird Gleichung (3) von Gleichung (4) abgezogen, so bleibt

$$k = -\frac{x'h}{\sqrt{r^2 - x'^2}} - \frac{h^2}{2\sqrt{r^2 - x'^2}} + \ldots$$

also

$$\frac{k}{h} = \frac{x'}{\sqrt{r^2 - x'^2}} - \frac{h}{2\sqrt{r^2 - x'^2}} + \ldots$$

mithin ist der gesuchte Grenzwerth des Quotienten $\frac{k}{h}$ gleich

$$-\frac{x'}{y'}$$

wenn man für $\sqrt{r^2 - x'^2}$ seinen Werth y' setzt. Die Gleichung einer Geraden, welche den Kreis in dem Punkte $x'y'$ berührt, ist demnach

$$y - y' = -\frac{x'}{y'}(x - x')$$

übereinstimmend mit dem in §. 9 auf anderem Wege gefundenen Resultate.

Nach dieser Methode läßt sich nun auch leicht die Gleichung der Ellipsentangente bestimmen. Wenn x' und y' die Coordinaten des Berührungspunktes sind, so ist

$$y' = \frac{B}{A}(A^2 - x'^2)^{1/2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Sind $y' + k$ und $x' + h$ die Coordinaten eines zweiten Punktes auf der Ellipse, so ist

$$y' + k = \frac{B}{A}[A^2 - (x + h)^2]^{1/2}.$$

Nach der so eben beim Kreise vorgenommenen Entwickelung ist aber

$$[A^2 - (x + h)^2]^{1/2} = (A^2 - x'^2)^{1/2} - \frac{x'h}{\sqrt{A^2 - x'^2}} - \frac{h^2}{2\sqrt{A^2 - x'^2}},$$

mithin auch

$$y' + k = \frac{B}{A}(A^2 - x'^2)^{1/2} - \frac{B}{A}\cdot\frac{x'h}{\sqrt{A^2 - x'^2}} - \frac{B}{A}\cdot\frac{h^2}{2\sqrt{A^2 - x'^2}}$$

$$k = -\frac{B}{A}\cdot\frac{x'h}{\sqrt{A^2 - x'^2}} - \frac{B}{A}\cdot\frac{h^2}{2\sqrt{A^2 - x'^2}}$$

$$\frac{k}{h} = -\frac{B}{A}\cdot\frac{x'}{\sqrt{A^2 - x'^2}} - \frac{B}{A}\cdot\frac{h}{2\sqrt{A^2 - x'^2}}.$$

Setzt man in diesen Werth von $\frac{k}{h}$ für $\sqrt{A^2 - x'^2}$ den aus Gleichung (5) gezogenen Werth $\frac{Ay'}{B}$ und $h = 0$, so erhält man den Grenzwerth

$$-\frac{B^2 x'}{A^2 y'}$$

als den Werth für die trigonometrische Tangente des Winkels, welchen

die gesuchte Berührende mit der Abscissenaxe macht. Die Gleichung der Tangente, welche die Ellipse in dem Punkt $x'y'$ berührt, ist also

$$y - y' = -\frac{B^2x'}{A^2y'}(x - x') \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

15 **Beziehungen der Tangente zu den Leitstrahlen.** Die Gleichung eines Leitstrahls FM, Fig. 17, welcher durch den Brennpunkt F der Ellipse, dessen Coordinaten $y''=0$ und $x''=-E$ sind, und durch einen Punkt M der Ellipse, dessen Coordinaten durch x' und y' bezeichnet werden, ist (Gleichung 9, Seite 10)

$$y - y' = \frac{y'}{x' + E}(x - x') \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Die trigonometrische Tangente des Winkels u, welchen die im Punkt M an die Ellipse gezogene Tangente ST mit dem Leitstrahl FM oder vielmehr mit seiner Verlängerung ML macht, findet man nach der Gleichung

$$tang.\, u = \frac{a - a'}{1 + aa'},$$

wenn man $a = \frac{y'}{x' + E}$ und $a' = -\frac{B^2x'}{A^2y'}$ setzt; es ergiebt sich alsdann

$$tang.\, u = \frac{\frac{y'}{x' + E} + \frac{B^2x'}{A^2y'}}{1 - \frac{B^2x'y'}{A^2y'(x' + E)}}$$

$$tang.\, u = \frac{A^2y'^2 + B^2x'^2 + B^2x'E}{A^2y'(x' + E) - B^2x'y'} = \frac{A^2y'^2 + B^2x'^2 + B^2x'E}{(A^2 - B^2)x'y' + A^2y'E}.$$

Setzt man A^2B^2 für $A^2y'^2 + B^2x'^2$ und E^2 für $A^2 - B^2$, so kommt

$$tang.\, u = \frac{A^2B^2 + B^2x'E}{E^2x'y' + A^2y'E} = \frac{B^2(A^2 + Ex')}{Ey'(A^2 + Ex')},$$

oder endlich

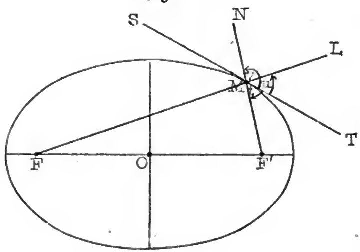
$$tang.\, u = \frac{B^2}{Ey'} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Um die trigonometrische Tangente des Winkels v zu finden, welchen die Berührende ST mit der Verlängerung des andern Leitstrahls $F'M$ macht, hat man in Gleichung (2) nur das Vorzeichen von E zu wechseln, es ergiebt sich alsdann

$$tang.\, v = -\frac{B^2}{Ey'}.$$

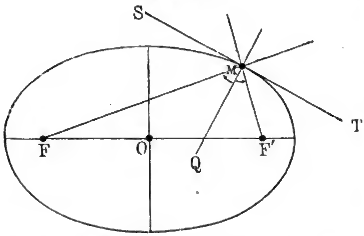
Der Winkel u ist also gleich dem Nebenwinkel von v, den wir mit t bezeichnen wollen. Die Tangente ST halbirt also den Winkel, welchen der eine Leitstrahl MF' mit der Verlängerung ML des andern macht.

Fig. 17.



Es ergiebt sich daraus ein einfaches Verfahren, durch einen gegebenen Punkt der Ellipse eine Tangente an dieselbe zu ziehen. Zur Uebung ziehe man an einige der früher construirten Ellipsen Tangenten durch beliebig gewählte Berührungspunkte.

Fig. 18.



Eine durch den Berührungspunkt rechtwinkelig zur Tangente gezogene Gerade MN wird eine Normale genannt. Die Normale MN halbirt den Winkel der beiden zum Berührungspunkt M gehörigen Leitstrahlen MF und MF', wie sich aus dem Obigen leicht nachweisen läßt.

Durchschnittspunkt der Ellipsentangente mit der Abscis- 16
senaxe. Die Gleichung der Tangente, welche die Ellipse im Punkte $x'y'$ berührt, ist, wie im §. 14 gezeigt wurde,

$$y - y' = -\frac{B^2 x'}{A^2 y'}(x - x').$$

Setzen wir in dieser Gleichung $y = 0$, so ergiebt sich für den Durchschnittspunkt der Tangente mit der Abscissenaxe

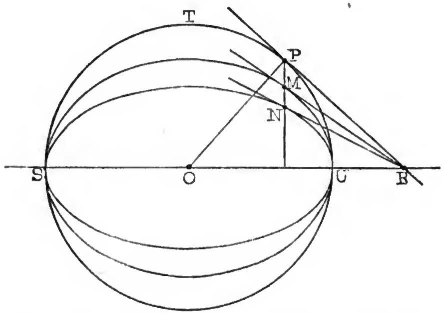
$$-A^2 y'^2 = B^2 x'^2 - B^2 x x'$$
$$B^2 x x' = B^2 x'^2 + A^2 y'^2 = A^2 B^2,$$

also endlich

$$x = \frac{A^2}{x'}.$$

Die Lage des Punktes R, Fig. 19, in welchem die durch den Punkt M der Ellipse an dieselbe gezogene Tangente die Abscissenaxe schneidet, hängt also nur von den Werthen von A und x' ab, sie ist unabhängig von B, d. h. unabhängig vom Werth der kleinen Axe. Wenn also über derselben großen Axe verschiedene Ellipsen construirt sind und man in den Punkten P, M, N, in welchen eine mit der Ordinatenaxe parallel gezogene Linie die verschiedenen Ellipsen schneidet, Tangenten an dieselben zieht, so werden alle diese Tangenten die Abscissenaxe in dem nämlichen Punkte R schneiden.

Fig. 19.



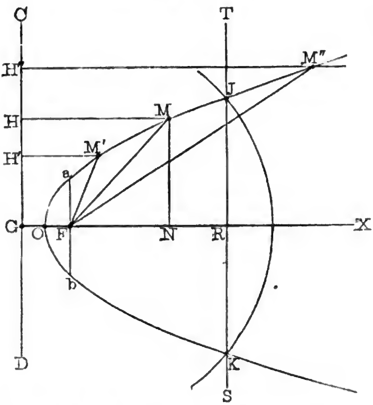
Daraus ergiebt sich ein einfaches Verfahren, durch einen gegebenen Punkt M einer Ellipse eine Tangente an dieselbe zu ziehen. Man ziehe um den Mittelpunkt O der Ellipse einen Kreis, dessen Radius gleich ist der großen Axe der Ellipse, ziehe alsdann durch M eine Linie rechtwinkelig zur Abscissenaxe und lege dann durch den Punkt P, in welchem dieses Perpendikel den Kreis schneidet, eine Tangente an den Kreis. Zieht man endlich vom Punkte R, in welchem die Kreistangente die Abscissenaxe schneidet, eine Linie nach M, so ist dies die verlangte Ellipsentangente.

Viertes Kapitel.

Die Parabel.

Die Gleichung der Parabel. Die Parabel ist eine ebene Curve, 17
welche die Eigenschaft hat, daß jeder Punkt M derselben gleich weit entfernt ist von einem festen Punkte F, Fig. 20, dem Brennpunkt der Parabel, und von einer geraden Linie CD, welche den Namen der Directrix führt. Es ist also der Leitstrahl FM gleich dem von M auf die Directrix gefällten Perpendikel MH.

Fig. 20.



Nehmen wir das durch F auf die Directrix gefällte Perpendikel GX zur Abscissenaxe, so ist es klar, daß der Punkt O, in welchem die Parabel die Abscissenaxe schneidet, in der Mitte zwischen G und F liegen muß, daß also $GO = OF$. Nehmen wir ferner den Punkt O zum Anfangspunkt der Coordinaten, so ist ON die Abscisse x und NM die Ordinate y des Punktes M; es ist demnach, wenn man die Länge OF mit p bezeichnet,

$$HM = GN = x + p$$

oder

$$GN^2 = x^2 + 2px + p^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

Es ist aber ferner auch

$$FM^2 = MN^2 + FN^2 = MN^2 + (ON - OF)^2$$
$$FM^2 = y^2 + (x - p)^2$$
$$FM^2 = y^2 + x^2 - 2px + p^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

Da aber $FM = GN$ sein soll, so ist auch $FM^2 = GN^2$ oder $FM^2 - GN^2 = 0$. Zieht man aber Gleichung (1) von Gleichung (2) ab, so bleibt

$$y^2 - 4px = 0$$

oder es ist

$$y^2 = 4px \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

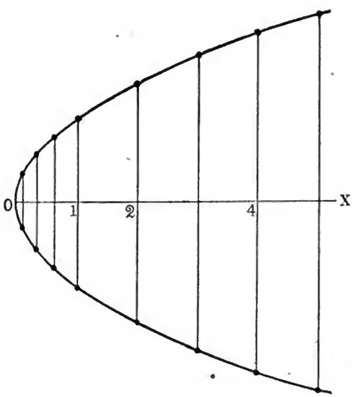
die gesuchte Gleichung der Parabel.

Um es anschaulich zu machen, wie eine solche Gleichung den Lauf einer krummen Linie darstellen kann, wollen wir für einen speciellen Werth von p die zusammengehörigen Werthe von x und y berechnen, welche der Gleichung (3) genügen; und dann dieselben als rechtwinkelige Coordinaten auftragen. Für $p = {}^1/_2$ wird die Gleichung (3)

$$y^2 = 2x,$$

setzen wir in diese Gleichung der Reihe nach die in der ersten Columne der folgenden Tabelle verzeichneten Werthe von x, so ergeben sich die zugehörigen Werthe von y, wie sie in der zweiten Columne dieser Tabelle eingetragen sind.

Fig. 21.



x	y
0,1	0,45
0,3	0,77
0,6	1,09
1	1,41
2	2,00
3	2,45
4	2,83
5	3,16

Diese zusammengehörigen Werthe von x und y sind nun in Fig. 21 in der Art als Coordinaten aufgetragen, daß auf der Abscissenaxe OX die Punkte bezeichnet wurden, welche um die Länge ${}^1/_{10}$, ${}^3/_{10}$, ${}^6/_{10}$, 1, 2 u. s. w. Centi-

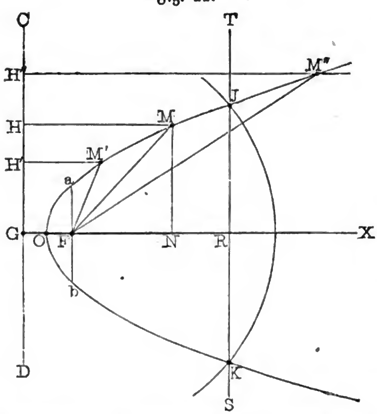
meter von O entfernt sind; in jedem dieser Punkte wurde alsdann ein Perpendikel errichtet und auf demselben der entsprechende Werth von y nach derselben Längeneinheit aufgetragen und endlich die so erhaltenen Gipfelpunkte der Ordinaten durch eine krumme Linie verbunden.

Jedem Abscissenpunkt entspricht ein positiver und ein negativer Werth von y, da ja $y = \pm\sqrt{2px}$.

Da y für negative Werthe von x imaginär wird, so erstreckt sich die Parabel von O aus nur nach der positiven Seite der Abscissenaxe hin, nach dieser Seite aber ist sie unbegrenzt, da y für jeden noch so großen positiven Werth von x einen reellen Werth hat. — Den Punkt O wollen wir die Spitze der Parabel nennen.

Aus der oben gegebenen Definition der Parabel ergiebt sich folgendes Verfahren, diese Curve zu construiren, ohne erst die zusammengehörigen Werthe von x und y zu berechnen. Nachdem die Abscissenaxe gezogen, der Brennpunkt F, Fig. 22, und der Punkt G bezeichnet ist, in welchem die Directrix die Abscissenaxe schneidet, ziehe man durch einen beliebigen Punkt R der Abscissenaxe eine Linie ST rechtwinkelig zu GX und beschreibe alsdann mit der Länge RG als Radius um den Brennpunkt F einen Kreisbogen. Die beiden Durchschnittspunkte K und J dieses Kreisbogens mit dem Perpendikel ST sind nun zwei Punkte der Parabel, deren man auf dieselbe Weise noch beliebig viele finden kann.

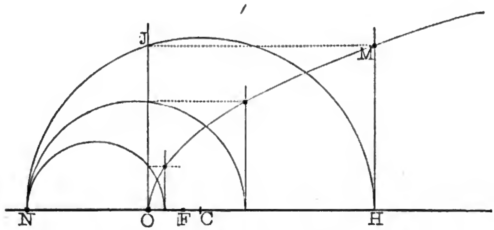
Fig. 22.



Eine andere Methode, die Parabel zu construiren, ergiebt sich aus ihrer Gleichung, denn nach dieser ist die Ordinate y die mittlere Proportionale zwischen x und $4p$. Nachdem man auf der Abscissenaxe den

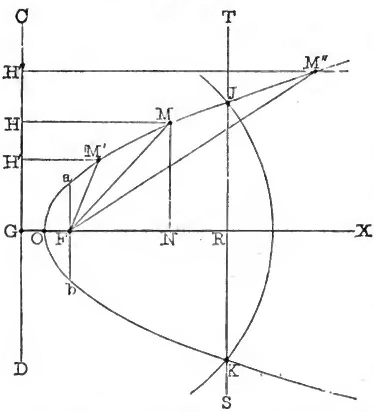
Brennpunkt F und die Spitze O, Fig. 23, der Parabel bezeichnet hat, trage man von O aus nach der negativen Seite der Abscissenaxe hin die

Fig. 23.



Länge $ON = 4\,OF$ auf. Soll nun der zur Abscisse OH gehörige Punkt der Parabel gesucht werden, so beschreibe man um den zwischen H und N in der Mitte liegenden Punkt C einen Kreis mit dem Radius CN und errichte in O ein Perpendikel, welches den Kreis in J schneidet. Errichtet man nun ferner in H ein Perpendikel auf der Abscissenaxe, so ist der Punkt M, in welchem dieses Perpendikel von einer parallel mit der Abscissenaxe durch J gezogenen Linie getroffen wird, ein Punkt der Parabel.

Fig. 24.



Für den Brennpunkt F ist $x = p$. Setzen wir diesen Werth von x in Gleichung (3), so kommt

$$y^2 = 4p^2$$
$$y = 2p.$$

Die zum Brennpunkt gehörige Ordinate Fa, Fig. 24, ist also gleich $2p$, also ist der dem Brennpunkt F entsprechende Durchmesser ab gleich $4p$.

Der parallel mit der Directrix durch den Brennpunkt gezogene Durchmesser ab der Parabel wird der **Parameter** derselben genannt.

Aufgabe. Man construire nach den beiden oben angegebenen Methoden Parabeln, deren Parameter 2, 3, 4 und 6 Centimeter ist.

Die Parabeltangente. Aus der Gleichung (3) S. 30 ergiebt sich 18

$$y = 2\sqrt{px} = 2p^{1/2}x^{1/2}.$$

Setzt man in dieser letzteren Gleichung $y + k$ an die Stelle von y und $x + h$ an die Stelle von x, so kommt

$$y + k = 2p^{1/2}(x + h)^{1/2}$$

$$y + k = 2p^{1/2}\left(x^{1/2} + {}^1/_2\frac{h}{x^{1/2}} + {}^1/_8\frac{h^2}{x^{1/2}} + \text{rc.}\right).$$

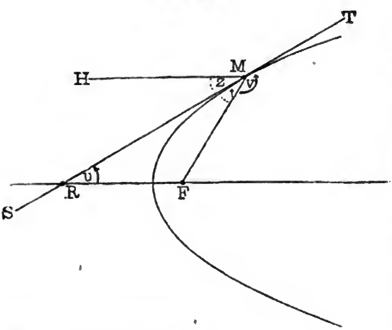
In der nach steigenden Potenzen von h geordneten Reihe ist also $2p^{1/2} \times \frac{1}{2x^{1/2}}$ oder $\sqrt{\frac{p}{x}}$ der Factor der ersten Potenz von h. Bezeichnen wir also mit u den Winkel, welchen eine im Punkte $x'y'$ an die Parabel gezogene Tangente mit der Abscissenaxe macht, so ist

$$tang.\, u = \sqrt{\frac{p}{x'}}.$$

Aus der Gleichung der Parabel ergiebt sich $x = \frac{y^2}{4p}$; setzen wir demnach an die Stelle von x' seinen Werth $\frac{y'^2}{4p}$, so kommt

$$tang.\, u = \frac{2p}{y'}.$$

Fig. 25.



Die Gleichung einer Geraden, welche die Parabel in dem Punkte $x'y'$ berührt, ist also

$$y - y' = \frac{2p}{y'}(x - x') \quad (1)$$

Die Gleichung eines Leitstrahles FM, Fig. 25, welcher durch den Brennpunkt F der Parabel geht, dessen Coordinaten sind $x'' = p$ und $y'' = 0$

und durch den Punkt M, Fig. 26, der Parabel, dessen Coordinaten sind x' und y', ist

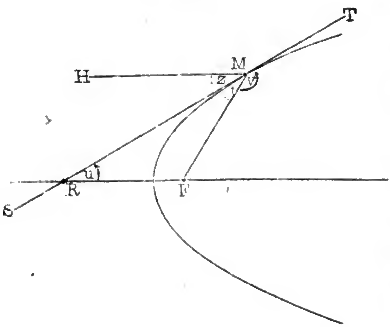
$$y - y' = \frac{y'}{x'-p}(x - x'),$$

oder, wenn man in dem Factor $\frac{y'}{x'-p}$ für x' seinen Werth $\frac{y'^2}{4p}$ setzt,

$$y - y' = \frac{4py'}{y'^2 - 4p^2}(x - x') \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

Die Tangente des Winkels v, welchen der durch Gleichung (2) dargestellte Leitstrahl FM mit der Tangente ST (Gleichung 1) macht, ergiebt sich aus der Gleichung

Fig. 26.



$$tang.\, v = \frac{a - a'}{1 + aa'}$$

wenn man $\frac{2p}{y'}$ für a und $\frac{4py'}{y'^2 - 4p^2}$ für a' setzt. Nach Ausführung aller Reductionen findet man

$$tang.\, v = -\frac{2p}{y'}$$

es ist also auch

$$tang.\, v = -\, tang.\, u,$$

es ist also der Winkel u, welchen die Tangente ST mit der Abscissenaxe macht, gleich dem Nebenwinkel des Winkels v, welchen der Leitstrahl FM mit dem von M aufwärts gerichteten Theil der Tangente macht, es ist also $\measuredangle u = \measuredangle t$. Da aber ferner $\measuredangle z = \measuredangle u$ (als Wechselwinkel), so ist auch $\measuredangle t = \measuredangle z$; die Tangente ST halbirt also den Winkel, welchen der Leitstrahl FM mit der Linie MH macht, welche vom Berührungspunkt M parallel mit der Abscissenaxe nach der negativen Seite der x hin gezogen ist.

Auf die eben vorgetragenen Sätze gründen sich zwei Methoden, durch einen gegebenen Punkt M der Parabel eine Tangente an dieselbe zu ziehen.

1. Man ziehe vom Punkte M eine Gerade nach dem Brennpunkt F und eine zweite MH parallel mit der Abscissenaxe nach der negativen

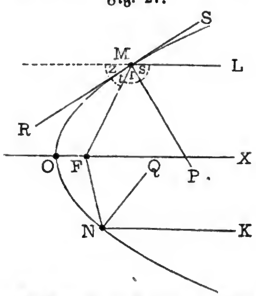
Seite der x hin. Die Halbirungslinie des Winkels HMF ist dann die verlangte Tangente.

2. Da $\measuredangle t = \measuredangle u$, so muß auch $RF = MF$ sein. Man ziehe also den zum Berührungspunkt M gehörigen Leitstrahl MF und schneide alsdann auf der Abscissenaxe von F nach der negativen Seite der x hin ein Stück FR ab, welches dem Leitstrahl FM gleich ist, so ist R der Punkt, in welchem die gesuchte Tangente die Abscissenaxe schneiden muß, RM also die Tangente selbst.

Zur Uebung ziehe man nach beiden Methoden Tangenten durch verschiedene Punkte der früher construirten Parabeln.

Eine durch den Berührungspunkt M rechtwinkelig zur Tangente gezogene Linie MP, Fig. 23, wird die Normale genannt. Wird nun von M aus eine Linie ML parallel mit der Abscissenaxe nach der positiven Seite der x hin gezogen, so ist nach dem Obigen leicht zu beweisen, daß der Winkel s, welchen die Normale mit ML macht, gleich ist dem Winkel r, welchen sie mit dem Leitstrahl MF macht, daß also die Normale den Winkel FML halbirt.

Fig. 27.



Wie man nach diesem Satz für einen gegebenen Punkt der Parabel die Normale ziehen kann, bedarf wohl keiner weiteren Erläuterung.

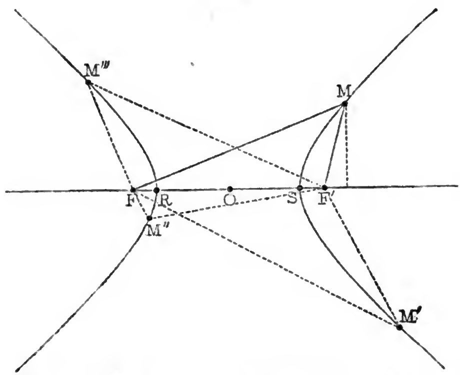
Fünftes Kapitel.

Die Hyperbel.

---

19 **Definition und Construction der Hyperbel.** Die Hyperbel ist eine Curve, welche die Eigenschaft hat, daß die Differenz der beiden von einem Punkte M, Fig. 28, der Curve nach zwei festen

Fig. 28.



Punkten F und F' gezogenen Leitstrahlen einer constanten Größe gleich ist, die wir mit $2A$ bezeichnen wollen.

Sind also M', M'', M''' weitere Punkte derselben Hyperbel, Fig. 28, so ist

$$FM' - F'M' = FM - F'M = F'M'' - FM'' = F'M''' - FM''' = 2A.$$

Die beiden Punkte F und F' werden auch hier der Analogie wegen Brennpunkte genannt. Ihre Entfernung, welche wir mit $2E$ bezeichnen wollen, muß nothwendig größer sein als die Differenz $2A$; denn bezeichnen wir zwei zusammengehörige Leitstrahlen mit l und l', so sind

l, l' und $2E$ die drei Seiten eines Dreiecks, und da die Summe zweier Seiten eines Dreiecks stets größer sein muß als die dritte Seite, so ist auch

$$2E + l' > l.$$

Es ist aber auch $2A = l - l'$, also

$$2A + l' = l,$$

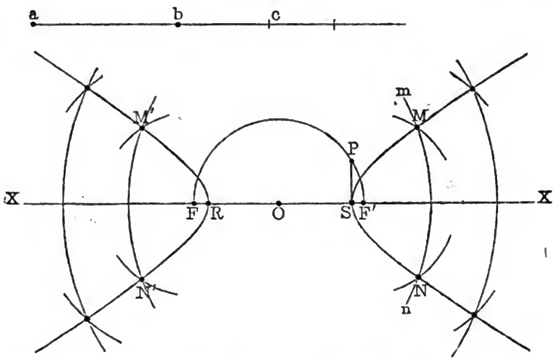
folglich auch

$$2E > 2A.$$

Ein Hyperbel ist durch den Abstand $2E$ der beiden Brennpunkte und die Differenz $2A$ zweier zusammengehörigen Leitstrahlen vollständig bestimmt und kann nach diesen Daten construirt werden.

Um diese Construction auszuführen, trage man auf eine gerade Linie XX, Fig. 29, die beiden Brennpunkte F und F' auf, bezeichne

Fig. 29.



den Punkt O, welcher zwischen beiden in der Mitte liegt, und trage von ihm aus auf jeder Seite die Länge OR und OS gleich A auf, so sind R und S die beiden Spitzen der Hyperbel. Da $FO = E$ und $OR = A$, so ist also auch $FR = E - A$.

Man schneide nun ferner auf einer benachbarten Linie die Länge $ab = 2A$ ab, beschreibe um den einen Brennpunkt F einen Kreisbogen mn mit einem beliebigen Radius, welcher größer ist als $E + A$, und schneide sodann auf der benachbarten Linie ein Stück ac ab, welches gleich ist dem Radius des Kreisbogens mn. Beschreibt man nun endlich um den andern Brennpunkt F' einen Kreisbogen mit dem Radius bc, so sind die beiden Punkte M und N, in welchen die beiden

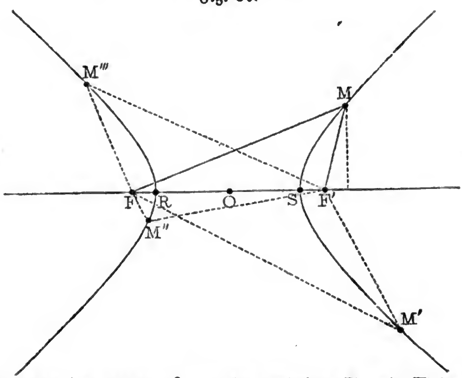
Kreise sich schneiden, zwei Punkte der Hyperbel. Ein zweites Paar von Punkten M' und N' findet man sodann, wenn man um den Punkt F' einen Kreis mit dem Radius ac, und um den Brennpunkt F einen Kreisbogen mit dem Radius bc beschreibt. Auf gleiche Weise lassen sich dann noch beliebig viele Punkte der Hyperbel finden.

Man construire auf diese Weise fünf Hyperbeln, für welche sämmtlich $2A = 4$ Centimeter ist. Der Abstand $2E$ der beiden Brennpunkte sei

für die erste	4,4 Centimeter,
» » zweite	4,6 »
» » dritte	5,0 »
» » vierte	6,0 »
» » fünfte	8,0 »

20 **Die Gleichung der Hyperbel.** Wir wollen, wie bei der Ellipse, die Verbindungslinie der beiden Brennpunkte F und F', Fig. 30, zur

Fig. 30.



Abscissenaxe und den Punkt O, welcher zwischen F und F' in der Mitte liegt, zum Anfangspunkt der Coordinaten nehmen. Der Abstand $OF = OF'$ soll auch hier mit E bezeichnet werden. Bezeichnen wir ferner FM, Fig. 30, mit l, $F'M$ mit l', so haben wir (vergl. §. 11)

$$l^2 = (x + E)^2 + y^2$$
$$l'^2 = (x - E)^2 + y^2,$$

wozu noch die Gleichung

$$l - l' = 2A$$

kommt. Combiniren wir diese drei Gleichungen in derselben Weise, wie es mit den Gleichungen (1), (2) und (3) in §. 11 geschehen ist, so gelangen wir auch hier zu der Gleichung

$$\frac{E^2x^2}{A^2} + A^2 = E^2 + x^2 + y^2.$$

Setzen wir aber, da E nothwendig größer sein muß als A,

$$E^2 = A^2 + B^2,$$

so kommt nach Ausführung aller Reductionen

$$A^2y^2 - B^2x^2 = - A^2B^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

welches die Gleichung der Hyperbel ist. Sie unterscheidet sich von der Gleichung der Ellipse dadurch, daß alle mit B^2 multiplicirten Glieder das entgegengesetzte Vorzeichen der entsprechenden Glieder der Ellipsengleichung haben.

Aus Gleichung (1) ergiebt sich

$$y = \pm \frac{B}{A}\sqrt{x^2 - A^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Nur für positive oder negative Werthe von x, welche größer sind als A, giebt diese Gleichung reelle Werthe von y; die Curve beginnt also einerseits erst in einem Punkte R, andererseits erst in einem Punkte S, welche beide um die Länge A vom Anfangspunkt O der Coordinaten abstehen. Für $x = \pm A$ wird aber $y = 0$, die Punkte R und S sind also zugleich die Durchschnittspunkte der Curve mit der Abscissenaxe.

Da jeder beliebige positive oder negative Werth von x, wenn er nur größer ist als A, reelle Werthe von y giebt, so muß sich die Curve von S aus nach der positiven, von R aus nach der negativen Seite der x hin ins Unendliche erstrecken; die Curve besteht also, wie auch die im vorigen Paragraphen besprochene Construction darthut, aus zwei getrennten Aesten, deren einander zugekehrte Spitzen R und S um die Länge $2A$ von einander entfernt sind, welche die Hauptaxe der Hyperbel genannt wird.

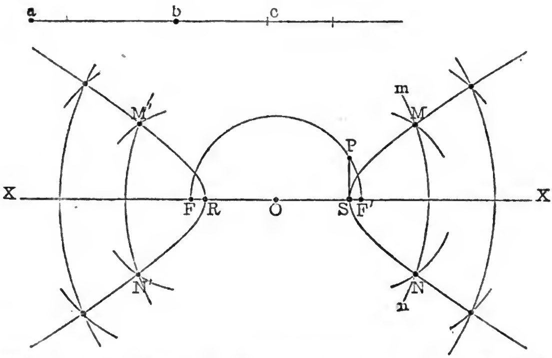
Die Größe B, die zweite Axe der Hyperbel, ist leicht durch Construction zu finden, denn es ist

$$B^2 = E^2 - A^2.$$

Man ziehe also um den Punkt O, Fig. 31 (a. f. S.), einen Kreis mit dem Halbmesser OF' und errichte in S ein Perpendikel auf der Abscissenaxe, so wird dieses Perpendikel den Kreis in einem Punkte P treffen; da nun

SP die eine Kathete eines rechtwinkeligen Dreiecks ist, dessen Hypotenuse $OP = E$ und dessen andere Kathete $OS = A$, so ist auch $SP = B$.

Fig. 31.



Wie groß ist B für die fünf Hyperbeln, welche am Schlusse des §. 19 zu construiren aufgegeben wurden?

Eine Hyperbel, für welche $A = B$, wird eine gleichseitige Hyperbel genannt.

Aufgabe. Man construire eine gleichseitige Hyperbel, für welche $A = B = 4$ Centimeter ist.

Wie groß ist E für diese Hyperbel?

21 **Die Tangente der Hyperbel.** Die Gleichung einer geraden Linie, welche die Hyperbel in einem Punkte M, Fig. 32, berührt, dessen Coordinaten x' und y' sind, ließe sich nach der bei der Ellipse und der Parabel angewandten Methode leicht ermitteln, wir kommen aber noch leichter zum Ziel, wenn wir zufolge der zwischen der Hyperbel und der Ellipse bestehenden Relation in der Gleichung der Ellipsentangente (Gleichung (6) Seite 26) das Vorzeichen des mit B^2 multiplicirten Gliedes in das entgegengesetzte verwandeln; es ergiebt sich alsdann

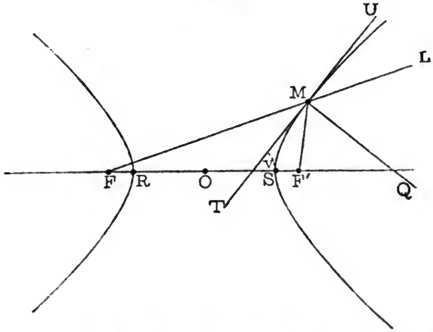
$$y - y' = \frac{B^2 x'}{A^2 y'} (x - x') \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

als die Gleichung der Hyperbeltangente.

Analog mit der Ellipse ergiebt sich alsdann auch, daß die Tangente

TU, Fig. 32, welche die Hyperbel in dem Punkte M berührt, den Winkel FMF' der beiden zu M gehörigen Leitstrahlen halbirt.

Fig. 32.



Ebenso ergiebt sich, daß die Normale MQ des Hyperbelpunktes M den Winkel halbirt, welchen der Leitstrahl $F'M$ mit der Verlängerung ML des andern Leitstrahles macht.

Zur Uebung ziehe man Tangenten und Normale durch beliebige Punkte der nach den früheren Angaben construirten Hyperbeln.

Die trigonometrische Tangente des Winkels v, welchen die im Punkte $x'y'$ die Hyperbel berührende Gerade mit der Abscissenaxe macht, ist nach Gleichung (1) $\frac{B^2x'}{A^2y'}$, oder, wenn man für y' seinen Werth setzt,

$$tang.\, v = \frac{Bx'}{A\sqrt{x'^2 - A^2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Der Punkt, in welchem die Tangente die Abscissenaxe schneidet, wird gefunden, wenn man in Gleichung (1) $y = 0$ setzt. Es ergiebt sich alsdann

$$- A^2y'^2 = B^2xx' - B^2x'^2$$
$$A^2y'^2 - B^2x'^2 = Bxx',$$

und da $x'y'$ ein Punkt der Hyperbel ist,

$$A^2B^2 = B^2xx'$$
$$x = \frac{A^2}{x'} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Die Asymptoten. Nach Gleichung (3) wird x um so kleiner, 22
je größer x' wird, d. h. der Durchschnittspunkt der Tangente mit der

Abscissenaxe nähert sich dem Mittelpunkt O der Hyperbel um so mehr, je weiter der Berührungspunkt wegrückt, für $x' = \infty$ wird $x = 0$.

Dividirt man Zähler und Nenner des Werthes von $tang.\, v$ in Gleichung (2) des vorigen Paragraphen durch x', so kommt

$$tang.\, v = \frac{B}{A\sqrt{1 - \frac{A^2}{x'^2}}}$$

ein Werth, welcher für $x' = \infty$ in

$$tang.\, v' = \pm \frac{B}{A}$$

übergeht. Wird also in S, Fig. 33, ein Perpendikel errichtet, nach oben und unten die Länge $SP = SQ = B$ aufgetragen, so sind die von O über P und Q gezogenen Geraden LN und $L'N'$ die Tangenten, welche die beiden Arme der Hyperbel in unendlicher Entfernung berühren werden. Diese den Abscissen $x' = \pm \infty$ entsprechenden Tangenten werden die Asymptoten der Hyperbel genannt.

Zwischen den Asymptoten und den entsprechenden Hyperbelzweigen findet eine um so größere Annäherung statt, je weiter man sich vom Mittelpunkte O der Hyperbel entfernt.

Für einen Punkt der Hyperbel haben wir

$$y^2 = \frac{B^2}{A^2} x^2 - B^2 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

für einen Punkt der Asymptote dagegen ist

$$y = \frac{B}{A} x$$

oder

$$y^2 = \frac{B^2}{A^2} x^2 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

Bezeichnen wir mit y' die Ordinate JK eines Hyperbelpunktes, welche einer bestimmten Abscisse entspricht, mit y'' die Ordinate JH eines zu derselben Abscisse gehörigen Punktes der Asymptoten, so erhält man durch Abziehen der Gleichung (1) von Gleichung (2)

$$y''^2 - y'^2 = B^2$$

$$(y'' - y')\,(y'' + y') = B^2$$

$$y'' - y' = \frac{B^2}{y'' + y'}.$$

Der Abstand $HK = y'' - y'$ zwischen der Asymptote und dem Hyperbelarm wird also um so kleiner, je größer y' und y'' wird; er wird

gleich 0 für $x = \infty$, da für $x = \infty$ auch y' und y'' unendlich groß werden.

Fig. 33.

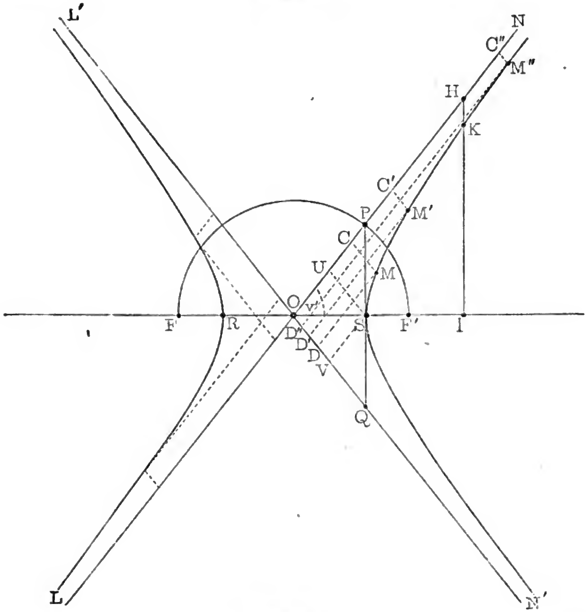
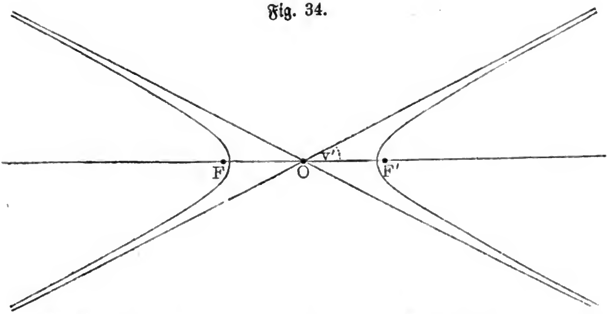


Fig. 34.



Die Annäherung der Hyperbelarme an die Asymptoten ist in Fig. 34

schon sehr deutlich zu ersehen, weil für diese Hyperbel bei gleichem Werth von A der Werth der zweiten Axe B viel kleiner ist, als für die in

Fig. 35.

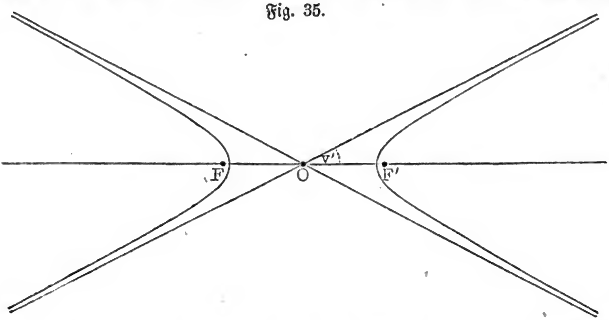


Fig. 33 gezeichnete Hyperbel, also der Werth $y'' - y' = \frac{B^2}{y'' + y'}$ unter sonst gleichen Umständen für die Hyperbel Fig. 35 viel kleiner sein muß, als für die Hyperbel Fig. 33.

Wir werden später noch andere wichtige Eigenschaften der Asymptoten kennen lernen.

Sechstes Kapitel.

Transformation der Coordinaten.

---

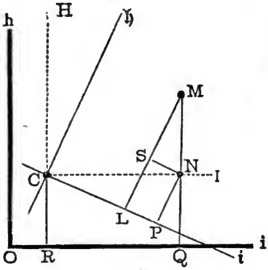
23 **Die Coordinaten eines Punktes bezogen auf verschiedene Axensysteme.** In Beziehung auf die Coordinatenaxen Oh und Oi, Fig. 36, sind $OQ = x$ und $MQ = y$ die Coordinaten des Punktes M.

Bezogen auf ein zweites Axensystem, dessen Axen CH und CJ mit den entsprechenden Axen des ersteren parallel laufen, ist $CN = X$ die Abscisse und $NM = Y$ die Ordinate des Punktes M. Sind nun $OR = a$ und $CR = b$ die Coordinaten des Anfangspunktes C des zweiten Axensystems bezogen auf das erste, so ist offenbar

$$\left.\begin{array}{l} Y = y - b \\ X = x - a \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Denken wir uns aber ferner durch denselben Punkt C ein drittes System rechtwinkeliger Axen $C\mathfrak{h}$ und $C\mathfrak{i}$ gelegt, so sind $CL = \mathfrak{x}$ und $LM = \mathfrak{y}$ die Coordinaten des Punktes M in Beziehung auf dieses dritte Axensystem.

Fig. 36.



Es ist nun

$$\mathfrak{y} = LS + SM$$
$$\mathfrak{x} = CP - LP.$$

Wird der Winkel $\mathfrak{i}CJ$, welchen die Axe der $\mathfrak{x}$ mit der Axe der X macht, mit α bezeichnet, so ist

$$\begin{aligned} LS &= PN = CN.\sin.\alpha = X.\sin.\alpha \\ SM &= MN.\cos.\alpha \qquad\quad = Y.\cos.\alpha \\ CP &= CN\;.\cos.\alpha \qquad\quad = X.\cos.\alpha \\ LP &= SN = MN.\sin.\alpha = Y.\sin.\alpha, \end{aligned}$$

also endlich

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{y} &= X.\sin.\alpha + Y.\cos.\alpha \\ \mathfrak{x} &= X.\cos.\alpha - Y.\sin.\alpha \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

Setzen wir für X und Y ihre obigen Werthe, so kommt

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{y} &= (x - a)\;\sin.\alpha + (y - b)\;\cos.\alpha \\ \mathfrak{x} &= (x - a)\;\cos.\alpha - (y - b)\;\sin.\alpha \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \quad (3)$$

oder umgekehrt

$$\left.\begin{aligned} y &= b + \mathfrak{y}\;\cos.\alpha - \mathfrak{x}\;\sin.\alpha \\ x &= a + \mathfrak{y}\;\sin.\alpha + \mathfrak{x}\;\cos.\alpha \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

Ist nun

$$\mathfrak{y} = f(\mathfrak{x})$$

die Gleichung irgend einer Curve in Beziehung auf das dritte der obigen Coordinatensysteme, so hat man nur für $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ ihre Werthe bei (3) zu setzen, um die Gleichung derselben Curve in Beziehung auf das erste Axensystem zu erhalten.

Es sei z. B.

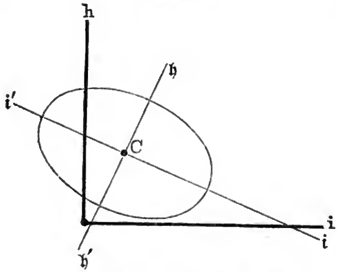
$$A^2\mathfrak{y}^2 + B^2\mathfrak{x}^2 = A^2B^2 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

die Gleichung einer auf das dritte Axensystem bezogenen Ellipse, Fig. 37 (a. f. S.), so haben wir nur die oben angedeuteten Substitutionen zu machen, um die Gleichung der Ellipse auf das erste Axensystem bezogen zu erhalten.

Wir wollen hier die angedeutete Substitution nicht durchführen, sondern nur untersuchen, welche Form die Gleichung der Ellipse durch eine solche Transformation der Coordinaten annehmen wird.

Wenn man den bei (3) gegebenen Werth von $\mathfrak{y}$ auf das Quadrat erhebt, so erhält man einen Ausdruck, dessen einzelne Glieder multiplicirt sind mit den variabeln Factoren x^2, y^2, xy, x und y; endlich kommen auch noch Glieder vor, welche nicht mit einem variabeln Factor behaftet sind. Dasselbe gilt von dem aufs Quadrat erhobenen Werthe von $\mathfrak{x}$; substituirt man also in die Gleichung (5) für $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ ihre Werthe bei (3), so wird die Gleichung nothwendig die Form

Fig. 37.



$$Cx^2 + Dy^2 + Exy + Fx + Gy = H \quad . \quad . \quad (6)$$

annehmen.

Zu einer Gleichung derselben Form, nämlich zu einer Gleichung, in welcher ein Glied vorkommt behaftet mit x^2, eines mit y^2, eines mit xy, eines mit x, eines mit y und endlich eines ohne variabeln Factor, gelangt man aber auch, wenn man die Gleichung der Parabel und die Gleichung der Hyperbel in gleicher Weise transformirt, wie es oben für die Ellipse angedeutet wurde; man gelangt ebenfalls zu einer Gleichung von der bei (6) gegebenen Form, welche sich von der Gleichung der Ellipse nur durch das Größenverhältniß und die Vorzeichen der constanten Factoren C, D, E, F, G und H unterscheiden werden.

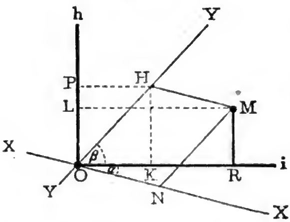
Die allgemeinste Form einer Gleichung zweiten Grades, wie sie bei (6) gegeben ist, repräsentirt also je nach dem Werth der constanten Factoren eine Parabel, eine Hyperbel oder eine Ellipse (der Kreis ist nur ein specieller Fall der Ellipse) und durch Uebergang von dem Axensystem, auf welches sich die Gleichung (6) bezieht; zu einem andern passend gewählten (durch geeignete Transformation der Coordinaten) kann man die Gleichung auf eine einfachere Gestalt zurückführen, und zwar gelangt man, je nach den speciellen Werthen der Factoren C, D, E u. s. w. entweder zu Gleichung (6) §. 11, oder zu Gleichung (3) §. 17, oder endlich zu Gleichung (1) §. 20. Ohne solche Transformationen durchzuführen, können wir aus diesen Andeutungen doch schon den Schluß ziehen:

Daß jede Gleichung des zweiten Grades zwischen den ver-

änderlichen Größen x und y, bezogen auf rechtwinkelige Coordinaten, entweder eine **Ellipse** oder eine **Parabel** oder eine **Hyperbel** darstellt.

Schiefwinkelige Coordinaten. Wir haben bisher stets angenommen, daß der Winkel, welchen die beiden Coordinatenaxen mit einander machen, ein rechter sei; man kann aber die Lage eines Punktes in der Ebene auch dadurch bestimmen, daß man ihn auf schiefwinkelige Coordinaten bezieht. Es seien XX und YY, Fig. 38, die sich schiefwinkelig schneidenden Coordinatenaxen, so findet man die Coordinaten 24

Fig. 38.



eines Punktes M in Beziehung auf dieses System, indem man durch M eine Linie parallel mit der Axe der Y zieht. Ist N der Punkt, in welchem diese Linie die Abscissenaxe trifft, so ist $ON = x$ die Abscisse und $NM = y$ die Ordinate des Punktes M.

Suchen wir nun die Beziehung zu ermitteln, welche stattfindet zwischen den schiefwinkeligen Coordinaten xy des Punktes M und den Coordinaten $OR = \mathfrak{x}$ und $RM = \mathfrak{y}$ bezogen auf die rechtwinkeligen Coordinatenaxen Oh und Oi, deren Durchschnittspunkt mit dem Anfangspunkt O des schiefwinkeligen Coordinatensystems zusammenfällt.

Es sei α der Winkel, welchen die Axe OX macht mit der Axe Oi, und β der Winkel, welchen die Axe OY macht mit der Axe Oi.

Von M werde ein Perpendikel ML auf die Axe der $\mathfrak{y}$ gefällt, MH parallel mit XX gezogen und von H gleichfalls ein Perpendikel HP auf Oh gefällt, so ist

$$\begin{aligned}\mathfrak{y} = RM = OL &= OP - PL \\ OP &= OH . \sin . \beta = y . \sin . \beta \\ PL &= HM . \sin . \alpha = x . \sin . \alpha ,\end{aligned}$$

also auch

$$\mathfrak{y} = y . \sin . \beta - x . \sin . \alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Man fälle ferner von H das Perpendikel HK auf die Axe Oi, so hat man

$$\mathfrak{x} = OR = OK + KR$$
$$OK = OH.\cos.\beta = x.\cos.\beta$$
$$KR = HM.\cos.\alpha = x.\cos.\alpha,$$

also auch

$$\mathfrak{x} = y.\cos.\beta + x.\cos.\alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Um von rechtwinkeligen Coordinaten $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$ auf schiefwinkelige xy überzugehen, hat man nur für $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ ihre obigen Werthe bei (1) und (2) zu setzen.

Nach diesen Auseinandersetzungen ist es nun leicht, die **Gleichung der Hyperbel** für den Fall zu entwickeln, daß man **die Asymptoten als Coordinatenaxen betrachtet.** Die Gleichung der Hyperbel, wie wir sie oben kennen lernten, ist

$$A^2\mathfrak{y}^2 - B^2\mathfrak{x}^2 = - A^2B^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

wenn wir mit $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ die rechtwinkeligen Coordinaten bezeichnen. Um die Gleichung der Hyperbel für schiefwinkelige Coordinaten zu erhalten, deren Anfangspunkt gleichfalls der Mittelpunkt der Hyperbel ist, hat man nur in die obige Gleichung der Hyperbel für $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ ihre Werthe bei (1) und (2) zu setzen. Sollen aber die Asymptoten selbst jene schiefwinkelig sich schneidenden Axen sein, so ist offenbar $\beta = \alpha$, die Gleichung (3) wird also nach jener Substitution

$$A^2(y - x)^2 \sin.\alpha^2 - B^2(y + x)^2 \cos.\alpha^2 = - A^2B^2 \quad . \quad . \quad (4)$$

Nun aber ist (§. 22)

$$\operatorname{tang}.\alpha = \frac{B}{A}$$
$$\frac{\sin.\alpha}{\cos.\alpha} = \frac{B}{A}$$
$$A.\sin.\alpha = B.\cos.\alpha,$$

demnach ergiebt sich aus Gleichung (4)

$$4A^2\sin.\alpha^2.xy = A^2B^2$$

oder

$$xy = \frac{B^2}{4\sin.\alpha^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Nun aber ist

$$\frac{\sin.\alpha^2}{\cos.\alpha^2} = \frac{B^2}{A^2}$$
$$\frac{\sin.\alpha^2}{1 - \sin.\alpha^2} = \frac{B^2}{A^2}$$
$$A^2.\sin.\alpha^2 = B^2(1 - \sin.\alpha^2)$$
$$(A^2 + B^2)\sin.\alpha^2 = B^2$$

$$sin.\alpha^2 = \frac{B^2}{A^2 + B^2},$$

und wenn man diesen Werth von $sin.\alpha^2$ in Gleichung (5) substituirt, so kommt

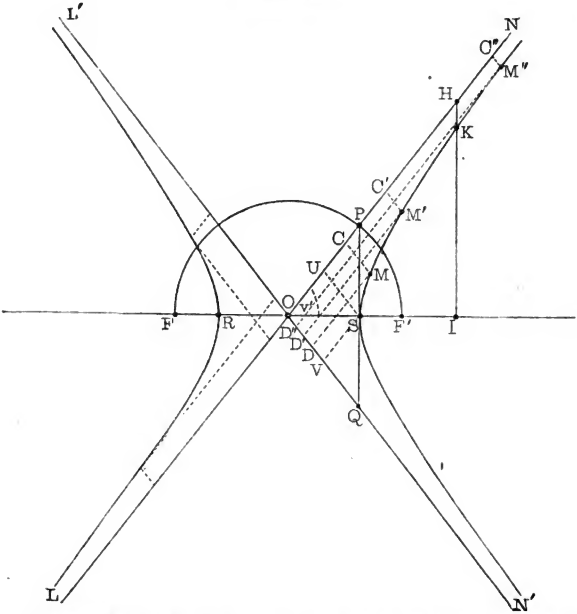
$$xy = \frac{A^2 + B^2}{4} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

oder

$$xy = C \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

wenn wir für den constanten Werth $\frac{A^2 + B^2}{4}$ einfach den Buchstaben C setzen.

Fig. 39.

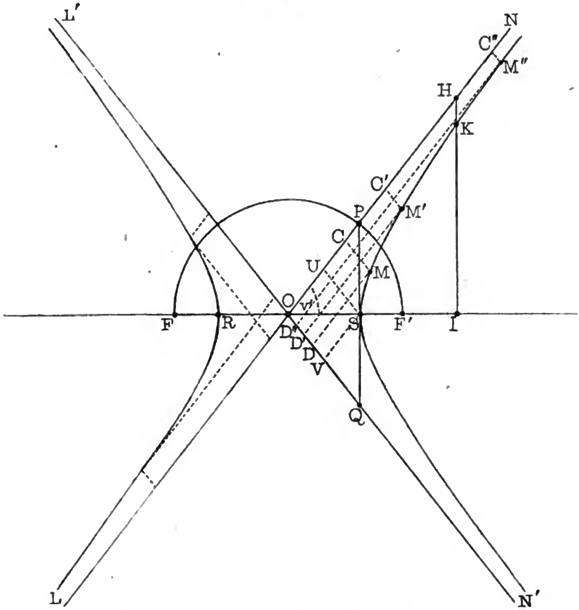


Diese Gleichung (6) oder (7) ist nun die auf ihre Asymptoten bezogene Gleichung der Hyperbel.

Zieht man also durch irgend einen Punkt M, Fig. 39, einer Hyperbel zwei Linien MC und MD parallel mit den beiden Asymptoten, so ist das Product der beiden Ordinaten MC und MD stets dasselbe.

Der Inhalt des Parallelogramms $MCDO$ ist aber $MC \times MD . sin. 2\alpha$, wenn α der Winkel ist, welchen eine Asymptote mit der Hauptaxe der

Fig. 40.



Hyperbel macht, also 2α der Winkel ist, welchen die beiden Asymptoten mit einander machen. Bezeichnen wir den Inhalt dieses Parallelogramms mit J, so haben wir also

$$J = x . y . sin. 2\alpha,$$

also auch

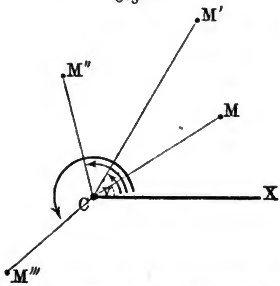
$$J = \frac{A^2 + B^2}{4} . sin. 2\alpha.$$

Der Inhalt des Parallelogramms $MCDO$ ist also unveränderlich derselbe, wo auch der Punkt M auf der Hyperbel liegen mag. Es sind also die Parallelogramme $MCOD$, $M'C'OD'$, $M''C''OD''$ u. s. w., Fig. 40, sämmtlich einander gleich und zwar gleich dem Inhalt der Raute $SOUV$, welche man erhält, wenn man vom Scheitel S der Hyperbel die Linien SU und SV parallel mit den Asymptotenaxen zieht.

Für die gleichseitige Hyperbel wird $2\alpha = 90^0$, also $\sin . 2\alpha = 1$ und $A = B$. Die besprochenen Parallelogramme werden alsdann längliche Rechtecke, deren Inhalt gleich $\frac{A^2}{2}$ ist.

Polarcoordinaten. Die Lage eines Punktes M, Fig. 41, in der 25
Ebene kann auch dadurch bestimmt werden, daß man seinen Abstand MC von einem in derselben Ebene liegenden festen Punkte C angiebt und den Winkel, welchen dieser Leitstrahl (radius vector) CM mit einer festen geraden Linie CX macht.

Fig. 41.



Die Länge des Leitstrahles CM wollen wir mit r, den Winkel MCX aber wollen wir mit v bezeichnen.

Um auf diese Weise Punkte in allen Theilen der Ebene, auch unterhalb der Linie CX bestimmen zu können, ohne in der Richtung der Winkelzählung eine Aenderung eintreten zu lassen, muß man die Winkel auch noch über 180^0 hinaus zählen, wie z. B. für den Punkt M''', Fig. 41, der Winkel v größer ist als 180^0.

Unter Umständen wird die Winkelzählung selbst noch über 360^0 hinaus fortgesetzt, wie wir unten bei der Construction der archimedischen Spirale sehen werden.

Zur Uebung trage man, nachdem man auf dem Papier den Punkt C markirt und die Linie CX gezogen hat, die durch folgende zusammengehörige Werthe von v und r bestimmten Punkte auf.

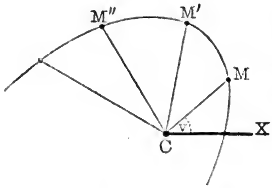
v	r	v	r
30^0	4^{cm}	210^0	$1{,}4^{cm}$
70^0	$2{,}5^{cm}$	250^0	$3{,}6^{cm}$
140^0	3^{cm}	320^0	$2{,}9^{cm}$

Der feste Punkt C, von welchem aus die Länge der Leitstrahlen gemessen wird, wird der Pol genannt. Die Bestimmungsstücke, welche

nach dieser Methode der Ortsbestimmung nöthig sind, um die Lage eines Punktes in der Ebene festzustellen, nämlich die Länge r des Leitstrahles und der Winkel v, welchen er mit der Anfangslinie CX macht, werden die **Polarcoordinaten** des Punktes genannt.

Wenn man von irgend einem Punkte M einer ebenen Curve, Fig. 42, nach einem zum Pol gewählten Punkte C zieht, so wird die Länge r dieses Leitstrahles eine andere werden, wenn man von einem Punkte M der Curve zu anderen Punkten M', M'' u. s. w. derselben übergeht, die Länge r des Leitstrahles ist also von seiner Richtung abhängig; da aber die Richtung des Leitstrahles durch den Winkel v bestimmt ist, so ist also r von v und umgekehrt v von r abhängig.

Fig. 42.



Die Abhängigkeit zwischen r und v, durch welche die Bedingung ausgesprochen wird, daß der durch die zusammengehörigen Werthe von r und v bezeichnete Punkt einer bestimmten Curve angehören soll, wird auch hier durch eine Gleichung zwischen r und v ausgedrückt, welche man die **Polargleichung der Curve** nennt und deren allgemeinste Form

$$r = f(v)$$

ist, welche ausdrückt, daß r eine Function von v ist.

Um klar zu machen, wie durch eine Gleichung zwischen r und v der Lauf einer Curve bestimmt werden kann, wollen wir die Curve näher betrachten, deren Gleichung ist

$$r = nv \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

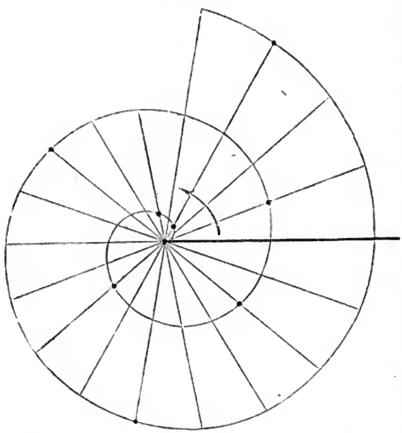
Diese Gleichung, in welcher n einen constanten Factor bezeichnet, stellt eine Curve dar, welche die Eigenschaft hat, daß die Länge eines Leitstrahles stets proportional ist der Größe des Winkels, welchen er mit der Anfangslinie CX macht.

Diese Curve ist unter dem Namen der **archimedischen Spirale** bekannt.

Setzen wir in Gleichung (1) $n = 0{,}05$, so ergeben sich folgende zusammengehörige Werthe von v (in Graden ausgedrückt) und r:

v	r	v	r	v	r
0	0	160	8	360	18
20	1	200	10	400	20
40	2	240	12	440	22
80	4	280	14	480	24
120	6	320	16	520	26

Fig. 43.



u. s. w. In Fig. 43 ist diese Curve in der Weise gezeichnet, daß die obigen Werthe von r als Millimeter aufgetragen sind. Zur Uebung zeichne man die Curve in der Weise, daß die obigen Werthe von r als pariser (oder irgend andere) Linien aufgetragen werden, wobei nur noch zu bemerken ist, daß es, um die Curve sicherer ziehen zu können, gut sein wird, auch noch die Werthe von r zu berücksichtigen, welche den Werthen $v = 60^0$, 100^0, 140^0 u. s. w. entsprechen.

Die Polargleichung der Parabel. Nehmen wir den Brennpunkt der Parabel zum Pol der Polarcoordinaten, die Axe derselben zur Anfangslinie der Winkelzählung, so ist MF, Fig. 44 (a. f. S.), der Leitstrahl r des Punktes M, welcher zum Winkel v (Winkel MFN) gehört. Für den Punkt M ist aber $MN = y$ die Ordinate und $ON = x$ die Abscisse, wenn man den Gipfel der Parabel zum Anfangspunkt des rechtwinkeligen Coordinatensystems nimmt. Nun ist aber offenbar 26

$$y = r\,.\,sin.\,v \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

$$x = OF + FN$$

oder

$$x = p + r\ cos.\,v \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

wenn p den Abstand des Brennpunktes vom Gipfel bezeichnet. Die Gleichung der Parabel für rechtwinkelige Coordinaten, deren Anfangspunkt im Gipfel der Curve liegt, ist aber

$$y^2 = 4px.$$

Setzen wir in diese Gleichung für x und y ihre Werthe bei (2) und (1), so kommt

$$r^2 \sin. v^2 = 4p\,(p + r \cos. v);$$

addirt man auf beiden Seiten $r^2 \cos. v^2$, so kommt

$$r^2 \sin. v^2 + r^2 \cos. v^2 = 4p^2 + 4pr \cos. v + r^2 \cos. v^2$$

$$r^2 = (2p + r \cos. v)^2$$

$$r = 2p + r \cos. v$$

$$r\,(1 - \cos. v) = 2p$$

$$r = \frac{2p}{1 - \cos. v} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

und dies ist die gesuchte Polargleichung der Parabel, wenn der Brennpunkt zum Pol gewählt wird. Für $v = 0$ erhält man nach dieser Gleichung $r = 8$. Für $v = 90^0$ wird $r = 2p$ und für $v = 180^0$ wird $r = p$.

Fig. 44.

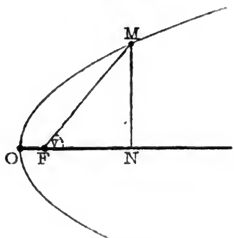
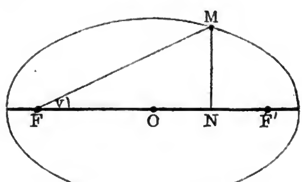


Fig. 45.



27 **Polargleichung der Ellipse und Hyperbel.** Nehmen wir den Brennpunkt F der Ellipse, Fig. 45, zum Pol der Polarcoordinaten, die Hauptaxe der Ellipse zur Anfangsrichtung der Winkelzählung, so ist $FM = r$ der Leitstrahl des Punktes M, welcher mit der Anfangslinie den Winkel $MFF' = v$ macht.

Für das rechtwinkelige Coordinatensystem, welches wir in §. 11 bei Entwickelung der Gleichung der Ellipse zu Grunde legten, ist $MN = y$

die Ordinate und $ON = x$ die Abscisse des Punktes M. Nun aber ist, wie leicht zu übersehen,

$$y = r.\sin.v \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

ferner ist

$$FN = r.\cos.v;$$

es ist aber

$$FN = E + x,$$

wenn E wie früher den Abstand des Brennpunktes F vom Mittelpunkt O der Ellipse bezeichnet. Folglich ist auch

$$x = r.\cos.v - E$$

oder

$$x = r.\cos.v - Ae \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

wenn wir Ae für E setzen. Da $B^2 = A^2 - E^2$, so ist demnach auch $B^2 = A^2 - A^2e^2$ oder $B^2 = A^2(1 - e^2)$. Substituiren wir diesen Werth von B^2 in die Gleichung der Ellipse (Gl. 6, §. 11), so kommt:

$$A^2y^2 + A^2(1 - e^2)x^2 = A^2.A^2(1 - e^2)$$

oder

$$y^2 + (1 - e^2)x^2 = A^2(1 - e^2) \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

eine veränderte Form der Gleichung der Ellipse, wenn ihre Hauptaxen zu Coordinatenaxen genommen werden, welche zum Uebergang auf Polarcoordinaten vortheilhafter ist, als die ursprüngliche Form der Ellipsengleichung.

Setzen wir in Gleichung (3) für y und x ihre Werthe bei (1) und (2), so kommt

$$r^2\sin.v^2 + (1 - e^2)(r\cos.v - Ae)^2 = A^2(1 - e^2)$$

$$r^2\sin.v^2 + r^2\cos.v^2 - 2Aer\cos.v + A^2e^2$$
$$- e^2r^2\cos.v^2 + 2Ae^3r\cos.v - A^2e^4 = A^2(1 - e^2)$$

$$r^2 - e^2r^2\cos.v^2 - 2Aer\cos.v(1 - e^2) + A^2e^2(1 - e^2) = A^2(1 - e^2)$$

$$r^2(1 - e^2\cos.v^2) - 2Aer\cos.v(1 - e^2) = A^2(1 - e^2)^2$$

$$r^2(1 - e^2\cos.v^2) = A^2(1 - e^2)^2 + 2A(1 - e^2)er\cos.v;$$

addirt man auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens $e^2r^2\cos.v^2$, so kommt

$$r^2(1 - e^2\cos.v^2) + e^2r^2\cos.v^2 = A^2(1 - e^2)^2$$
$$+ 2A(1 - e^2)er\cos.v + e^2r^2\cos.v^2$$

$$r^2 = [A(1 - e^2) + er\cos.v]^2$$

$$r = A(1 - e^2) + er\cos.v$$

$$r(1 - e\cos.v) = A(1 - e^2)$$

$$r = \frac{A(1 - e^2)}{1 - e\cos.v} \quad \ldots \ldots \quad (4)$$

die gesuchte Polargleichung der Ellipse, in welcher e jederzeit kleiner sein muß als 1, da $E < A$.

Hätte man den andern Brennpunkt F', Fig. 39, zum Pol der Polarcoordinaten gewählt, so würde man

$$r = \frac{A(1 - e^2)}{1 + e \cos. v} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

als Polargleichung der Ellipse gefunden haben.

Für $e = 0$ wird

$$r = A$$

und dies ist die Polargleichung des Kreises.

Nach demselben Verfahren, welches wir für die Ellipse angewendet haben, findet man aber auch

$$r = \frac{A(1 - e^2)}{1 \pm e \cos. v} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$

für die Polargleichung der Hyperbel, und zwar gilt das obere oder untere Vorzeichen im Nenner, je nachdem man den einen oder andern Brennpunkt der Hyperbel zum Pol wählt.

Für die Hyperbel ist e stets größer als 1.

Dieselbe Gleichung (6) stellt also entweder eine Ellipse oder eine Hyperbel dar, je nachdem $e < 1$ oder $e > 1$ ist.

Siebentes Kapitel.

Curven höherer Ordnung und transscendente Curven.

28 **Parabeln verschiedener Ordnung.** Wir haben gesehen, daß jede Gleichung ersten Grades zwischen den Veränderlichen x und y, auf rechtwinkelige Coordinaten bezogen, eine gerade Linie darstellt, während jede Gleichung zweiten Grades zwischen zwei Variabeln entweder eine Parabel oder eine Ellipse oder eine Hyperbel repräsentirt, je nach dem Größenverhältniß und den Vorzeichen der constanten Factoren.

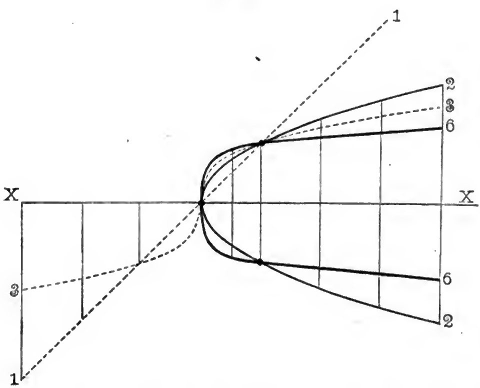
Alle Curven, deren Gleichung höhere Potenzen von x und y enthält, werden **Curven höherer Ordnung** genannt und es giebt deren unzählig viele, von denen wir nur einige der einfachsten betrachten wollen.

Alle Curven, deren Gleichung in die allgemeine Form

$$y^n = ax^m \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

passen, in welcher a, n und m constante Größen bezeichnen, werden unter dem gemeinschaftlichen Namen der **Parabeln** zusammengefaßt. Streng genommen gehört also auch die gerade Linie unter die Zahl der Parabeln, denn Gleichung (1) geht in die Gleichung einer geraden Linie über, wenn $n = m = 1$. Die **Parabel zweiter Ordnung**, für welche $m = 1$ und $n = 2$, wird vorzugsweise **Parabel** genannt, und nur diese im vierten Kapitel näher besprochene krumme Linie ist gemeint, wenn man ohne weitere Bezeichnung von einer Parabel redet. Sobald in Gleichung (1) m und n irgend welche andere Werthe haben als 1 und 2, stellt dieselbe eine **Parabel höherer Ordnung** dar.

Fig. 46.



In Fig. 46 sind vier Curven zusammengestellt, welche der Gleichung

$$y^n = x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

entsprechen. Als Längeneinheit ist bei Construction dieser Curven das Centimeter angenommen worden. Für $n = 1$ stellt Gleichung (2) eine gerade Linie dar, welche einen Winkel von 45° mit der Abscissenaxe macht.

Für $n = 2$ stellt Gleichung (2) die gewöhnliche Parabel dar. Im Falle $n = 2$ giebt Gleichung (2) folgende zusammengehörige Werthe von x und y, nach welchen man die Curve auftragen kann:

x	y
0,2	0,45
0,5	0,72
1	1
2	1,41
3	1,73
4	2

Ist in Gleichung (2) $n = 3$, so haben wir mit einer Parabel dritter Ordnung zu thun, wir erhalten nach der Gleichung $y^3 = x$ folgende zusammengehörige Werthe von x und y:

x	y
0,2	0,59
0,5	0,79
1	1
2	1,26
4	1,59

Für $n = 6$ geht Gleichung (2) über in

$$y^6 = x$$

und dieser Gleichung entsprechen folgende zusammengehörige Werthe von x und y:

x	y
0,2	0,76
0,5	0,89
1	1
4	1,26

Für $x = 0$ ergiebt sich bei allen der Gleichung (2) angehörigen Curven auch $y = 0$, für $x = 1$ ergiebt sich auch für alle $y = 1$.

Zur Uebung construire man die Curven, deren Gleichung ist:

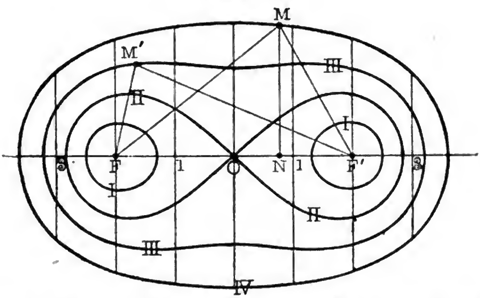
$$y^2 = 2x$$
$$y^3 = 2x$$
$$y^4 = 2x,$$

indem man für x der Reihe nach in diesen Gleichungen setzt $^2/_{10}$, $^5/_{10}$, 1, 2 und 4, die zugehörigen Werthe von y berechnet und aufträgt, wobei man etwa den badischen Zoll als Längeneinheit annehmen kann.

Wir können hier nicht weiter auf die Besprechung der Eigenschaften der Parabeln höherer Ordnung eingehen.

Die Lemniscate. Die Lemniscate ist eine krumme Linie, 29
welche die Eigenschaft hat, daß für jeden Punkt M, Fig. 47,

Fig. 47.



derselben das Product $MF \times MF'$ der Abstände desselben von zwei festen Punkten F und F' stets einer constanten Größe gleich ist.

Wir wollen den Abstand der beiden Punkte F und F' mit $2E$ und den constanten Werth des Productes $MF \times MF'$ mit A^2 bezeichnen. — Nehmen wir die Verbindungslinie der beiden festen Punkte F und F' zur Abscissenaxe und den Punkt O derselben, welcher zwischen F und F' in der Mitte liegt, zum Anfangspunkt der Coordinaten, so ist die Abscisse des Punktes M gleich $ON = x$ und die Ordinate desselben $NM = y$; wir haben also

$$FM^2 = (E + x)^2 + y^2$$
$$F'M^2 = (E - x)^2 + y^2,$$

es ist also nach der Definition der Lemniscate

$$[(E + x)^2 + y^2]\,[(E - x)^2 + y^2] = A^2 \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

eine Gleichung vierten Grades als Gleichung der Lemniscate. Nach einigen Reductionen ergiebt sich aus Gleichung (1)

$$x^2 + y^2 + E^2 = \sqrt{4\,E^2x^2 + A^4}$$

und daraus

$$y = \sqrt{\left(- x^2 - E^2 + \sqrt{4\,E^2x^2 + A^4}\right)} \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Für den Durchschnittspunkt der Curve mit der Abscissenaxe ist $y = 0$, also

$$x^2 + E^2 = \sqrt{4\,E^2x^2 + A^4}$$
$$x^4 + 2\,E^2x^2 + E^4 = 4\,E^2x^2 + A^4$$
$$x^4 - 2\,E^2x^2 + E^4 = A^4$$
$$x^2 - E^2 = \pm A^2$$
$$x = \pm\sqrt{E^2 \pm A^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Die Gleichung (3) giebt vier Werthe für x, von denen aber zwei als imaginär wegfallen, sobald $A > E$. Für $A = E$ giebt Gleichung (3) drei reelle Werthe für x, von denen einer gleich Null. Für $A > E$ hat also die Curve 2, für $A = E$ hat sie 3, für $A < E$ endlich hat sie 4 Durchschnittspunkte mit der Abscissenaxe gemein, woraus man schon übersehen kann, daß der Charakter der Curve ein wesentlich anderer sein wird, je nachdem A größer, gleich oder kleiner als E ist. Um dies anschaulicher zu machen, wollen wir den Verlauf der Curve nach Gleichung (2) für specielle Werthe von E und A verfolgen, und zwar wollen wir fur alle folgenden Beispiele $E = 2$ (Centimeter) annehmen, dagegen für A der Reihe nach verschiedene Werthe setzen.

I. $E = 2$, $A = 1{,}5$, also $A < E$. Für diese Werthe der Coefficienten E und A wird Gleichung (2)

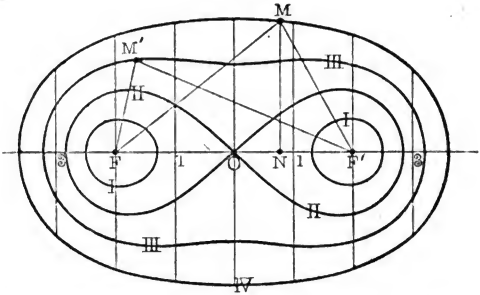
$$y = \sqrt{\left(- x^2 - 4 + \sqrt{16\,x^2 + 5{,}06}\right)} \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Dieser Gleichung entsprechen folgende zusammengehörige Werthe von x und y:

x	y
$\pm$ 1,32	0
$\pm$ 2	$\pm$ 0,55
$\pm$ 2,5	0

Für positive oder negative Werthe von x, welche kleiner sind als 1,32 und größer als 2,5, giebt Gleichung (4) für y nur imaginäre Werthe. Die Curve besteht demnach aus zwei gesonderten in sich geschlossenen Stücken, wie man dies Fig. 48 sieht, in welcher die um F und F' ge-

Fig. 48.



zogenen mit I bezeichneten ringförmigen Figuren der Gleichung (4) entsprechen. Bei der Construction dieser Figur ist ebenso wie bei der Construction der Curven II, III und IV das Centimeter zur Längeneinheit angenommen worden.

II. $E = 2$, $A = 2$, also $A = E$. Für diesen Fall geht Gleichung (2) über in

$$y = \sqrt{(-x^2 - 4 + \sqrt{16x^2 + 16})} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Dieser Gleichung genügen folgende zusammengehörige Werthe von x und y:

x	y
0	0
$\pm$ 1	$\pm$ 0,81
$\pm$ 2	$\pm$ 1
$\pm$ 2,83	0

wonach die mit II bezeichnete Curve in Fig. 48 construirt ist; sie besteht aus zwei in sich geschlossenen Stücken, welche in O zusammenstoßen.

III. $E = 2$, $A = 2,5$, also $A > E$. Für diesen Fall geht Gleichung (2) über in

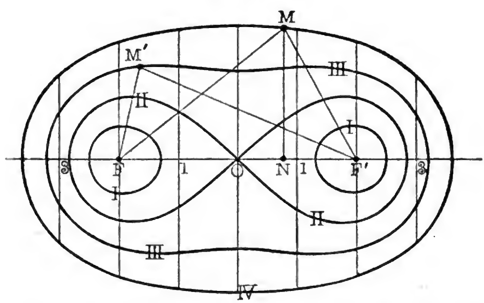
$$y = \sqrt{(-x^2 - 4 + \sqrt{16x^2 + 38,9})} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

welcher Gleichung folgende zusammengehörige Werthe von x und y genügen:

x	y
0	$\pm$ 1,5
$\pm$ 1	$\pm$ 1,55
$\pm$ 2	$\pm$ 1,45
$\pm$ 3	$\pm$ 0,72
$\pm$ 3,2	0

Die nach Gleichung (6) construirte Curve ist in Fig. 49 mit III bezeichnet. Die beiden für $A < E$ getrennten Curvenstücke vereinigen sich hier zu einer einzigen geschlossenen Curve.

Fig. 49.



IV. $E = 2$, $A = 3$, also gleichfalls $A > E$. Für diese Werthe von E und A wird aus Gleichung (2) die Gleichung

$$y = \sqrt{(-x^2 - 4 + \sqrt{16x^2 + 81})} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

welcher folgende zusammengehörige Werthe von x und y gehören:

x	y
0	$\pm$ 2,25
$\pm$ 1	$\pm$ 2,2
$\pm$ 2	$\pm$ 2,00
$\pm$ 3	$\pm$ 1,41
$\pm$ 3,6	0

wonach die Curve IV in Fig. 49 construirt ist.

Die Lemniscate Gleichung (2) zerfällt also in zwei getrennte geschlossene Curven, so lange $A < E$; sie bildet aber eine einzige geschlossene Curve, sobald $A > E$.

Eine weitere Besprechung der Curven höherer Ordnung gehört nicht hier her.

Transscendente Curven. Mit dem Namen der transscendenten Curven bezeichnet man diejenigen, in deren Gleichung die Ordinate y als eine Exponentialfunction, als eine logarithmische Function oder als trigonometrische Function der Abscisse x erscheint. Man kann diese Curven am einfachsten in der Weise construiren, daß man die zusammengehörigen Werthe von x und y aus der Gleichung berechnet und als rechtwinkelige Coordinaten aufträgt, wie wir dies beispielsweise für zwei solcher Curven ausführen wollen. 30

Es sei die Gleichung

$$y = 2^x \ldots$$

zu construiren. Dieser Gleichung entsprechen folgende zusammengehörige Werthe von x und y:

x	y
— 4	0,062
— 3	0,125
— 2	0,25
— 1	0,5
0	1,0

x	y
0	1
1	2
2	4
3	8
4	16

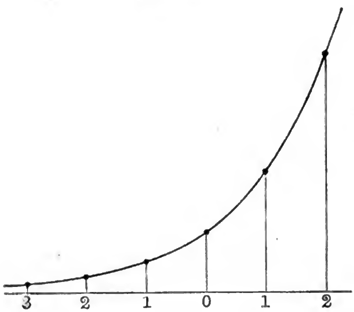
wonach die Curve, Fig. 50 (a. f. S.), das Centimeter als Längeneinheit nehmend, construirt ist.

Um die Gleichung

$$y = n \,.\, sin.\, x$$

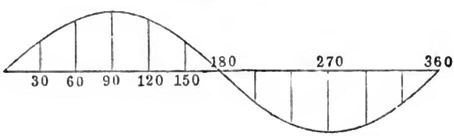
zu construiren, muß man sich erst darüber entscheiden, welche Längeneinheit man zum Auftragen der Winkelgrößen x wählen will. Längen und Winkel sind verschiedene Dinge, welche nicht mit derselben Einheit gemessen werden können, sie sind incommensurabel. Wenn man also die x der Gleichung $y = n \,.\, sin.\, x$ als Abscissen auftragen will, so kann dies nur in sofern geschehen, daß man eine der Winkelgröße x proportionale Länge aufträgt. So ist denn in Fig. 51 die Gleichung

Fig. 50.



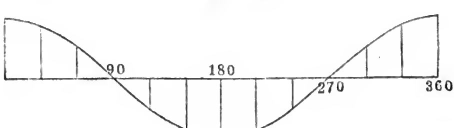
$$y = sin.\, x$$

Fig. 51.



in der Weise construirt, daß für eine Winkelgröße von 90^0 eine Länge von 18^{mm}, also für 10^0 die Länge von 2^{mm} aufgetragen ist. Zur Einheit der Ordinaten ist das Centimeter gewählt.

Fig. 52.



In gleicher Weise repräsentirt Fig. 52 die Gleichung

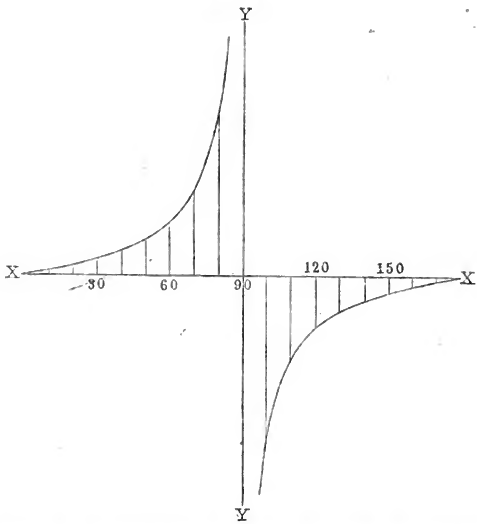
$$y = cos.\, x$$

und Fig. 53 die Gleichung

$$y = tang. x.$$

Bei Construction der letztern Figur, welche sich nur auf die beiden

Fig. 53.



ersten Quadranten des Winkels x erstreckt, ist jedoch der Maaßstab der Abscissen doppelt so groß, der der Ordinaten nur halb so groß genommen als für die beiden vorhergehenden Figuren.

Etwas complicirter als die oben betrachteten ist die Gleichung der **Kettenlinie**, d. h. derjenigen krummen Linie, welche durch eine möglichst biegsame Kette (oder durch ein Seil) gebildet wird, welche an zwei Punkten so aufgehängt ist, daß sie frei zwischen denselben herabhängt. Die Gleichung dieser Curve ist:

$$x = \frac{A . cos. c}{h} \, log. \frac{A - hy \pm \sqrt{(A - hy)^2 - A^2 (cos. c)^2}}{A (1 - sin. c)} \quad . \quad (1)$$

Die Ableitung derselben ist eine Aufgabe der Mechanik; hier wollen wir uns auf die Discussion derselben beschränken. A, h und c sind Constanten, deren Bedeutung hier nicht weiter erörtert werden kann. Wir wollen diese Gleichung auf ein rechtwinkeliges Axensystem beziehen, für

welches die positiven Werthe von y von der Axe der x nach unten gezählt werden.

Im Allgemeinen giebt obige Gleichung der Kettenlinie für jeden speciellen Werth von y zwei Werthe von x, welche in einen einzigen zusammen fallen, wenn

$$A - hy = A \cos. c,$$

also wenn

$$y = \frac{A(1 - \cos. c)}{h};$$

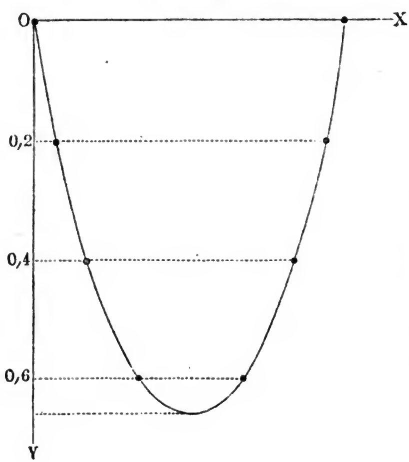
denn für diesen Werth von y wird der unter dem Wurzelzeichen stehende Ausdruck gleich 0. Für noch größere Werthe von y erhält man imaginäre Werthe von x, weil alsdann der unter dem Wurzelzeichen stehende Ausdruck negativ wird.

Setzen wir $A = 1$, $h = 1$ und $c = 70^0$, so geht Gleichung (1) über in

$$x = 0{,}342 \ldots \log. \frac{1 - y \pm \sqrt{(1 - y)^2 - 0{,}117 \ldots}}{0{,}06 \ldots} \quad . \quad . \quad (2)$$

Aus dieser Gleichung ergeben sich folgende zusammengehörige Werthe von y und x:

Fig. 54.



y	x		
0	0	oder	0,517
0,2	0,033	»	0,483
0,4	0,085	»	0,431
0,6	0,173	»	0,343
0,658	0,2585		

Nach diesen Zahlenwerthen ist die Kettenlinie, Fig. 54, construirt, indem das Decimeter zur Längeneinheit gewählt wurde.

Zweites Buch.

Analytische Geometrie im Raume.

Erstes Kapitel.

Punkte, Linien und Oberflächen im Raum.

Coordinatenaxen im Raum. So wie die Lage eines Punktes 31
in der Ebene durch Beziehung desselben auf zwei einander schneidende Coordinatenaxen bestimmt ist, so kann man die Lage eines Punktes *im Raum* durch Beziehung auf *drei Coordinatenaxen* bestimmen, von denen jede auf der Ebene der beiden anderen rechtwinkelig steht. (Von der Betrachtung schiefwinkeliger Coordinaten im Raum nehmen wir Umgang.)

Ein solches Coordinatensystem kann man auf dem Papier nicht unmittelbar darstellen, d. h. man kann die drei Axen auf dem Papier nicht in ihrer wahren gegenseitigen Lage auftragen, weil sie nicht in einer Ebene liegen, indem ja jede Axe aus der Ebene der beiden anderen heraustritt. Man muß deshalb, um durch Zeichnung eine Anschauung von einem solchen Coordinatensystem zu geben, zu perspectivischer Darstellung seine Zuflucht nehmen, indem wenigstens eine der drei Axen verkürzt gezeichnet wird.

Fig. 55.

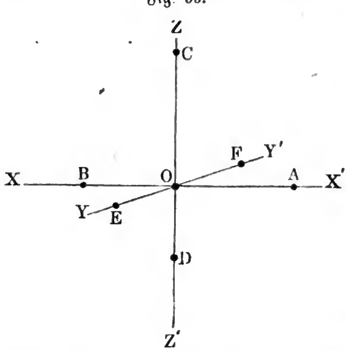
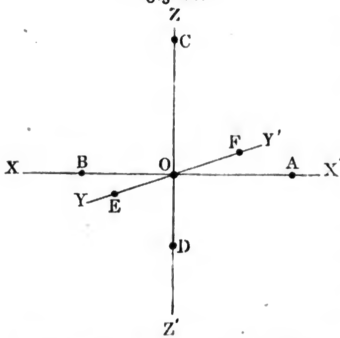


Fig. 55 stellt das perspectivische Bild eines aus drei zu einander rechtwinkeligen geraden Linien gebildeten Axensystems dar. Zwei der Axen, nämlich XX' und ZZ', sollen in der Ebene des Papiers liegen und wir wollen annehmen, daß

die Axe der x stets horizontal, die Axe der z stets vertical gestellt ist; die dritte Axe aber, nämlich die Axe der y, soll rechtwinkelig stehen zur Ebene des Papiers, also rechtwinkelig sowohl auf der Axe der x als auf der Axe der z; sie kann also in einer Zeichnung nicht in ihrer wahren Lage aufgetragen, sondern sie muß schräg liegend gezeichnet werden, wie dies in unserer Figur geschehen ist, welche das Axensystem so darstellt, als ob es sich links vom Auge des Beschauers und etwas unter demselben befände.

In allen folgenden Figuren sind die Dimensionen in der Richtung der Axe der x und der Axe der z in ihrer wahren Größe, die Dimensionen in der Axe der y aber verkürzt und zwar in $^1/_2$ der wahren Länge aufgetragen. So liegt z. B. der Punkt A, Fig. 56, 2^{cm} rechts, B $1{,}5^{cm}$ links von O. Der Punkt C liegt $2{,}2^{cm}$ über, D $1{,}2^{cm}$ unter O. — E stellt dagegen einen Punkt dar, welcher 2^{cm} vor und F einen solchen, welcher $2{,}3^{cm}$ hinter O liegt.

Fig. 56.



Die positiven Werthe von x sollen stets von O nach der Rechten, die positiven Werthe von z von O nach oben, die positiven Werthe von y endlich von O nach vorn gezählt werden.

32 **Die Coordinatenebenen.** Durch je zwei der eben besprochenen Coordinatenaxen kann man sich eine Ebene gelegt denken, welche nach den beiden Axen genannt wird, welche sie enthält. Von der gegenseitigen Lage dieser Ebenen soll Fig. 57 ein Bild geben.

Die Ebene der xz ist eine verticale Ebene, welche in unserer Figur unverkürzt erscheint und auf welcher die Axe der y rechtwinkelig steht.

Die Ebene der yz ist gleichfalls eine verticale Ebene, welche, von vorn nach hinten gerichtet, in unserer Figur verkürzt erscheint und auf welcher die Axe der x rechtwinkelig steht.

Die Ebene der xy ist eine horizontale Ebene, weil sie durch die beiden horizontalen Axen x und y gelegt ist; auf ihr steht die Axe der z rechtwinkelig. In unserer Figur erscheint die Ebene der xy verkürzt.

Je zwei dieser Coordinatenebenen schneiden sich in einer Axe; nämlich:
die Ebene der xz und die Ebene der yz in der Axe der z
" " " xz " " " " xy " " " " x
" " " yz " " " " xy " " " " y.

Durch die drei eben besprochenen Ebenen werden um den Anfangspunkt der Coordinaten herum acht körperliche Ecken gebildet, wie dies unsere Figur anschaulich machen soll. Als das erste dieser körperlichen Ecken wollen wir dasjenige bezeichnen, dessen Kanten durch die drei positiven Arme der Coordinatenaxen gebildet werden. Es ist dies also das körperliche Eck oben, vorn und rechts, das einzige, welches in Fig. 57 vollständig sichtbar ist, d. h. von welchem kein Theil durch eine der Coordinatenebenen verdeckt erscheint.

Fig. 57.

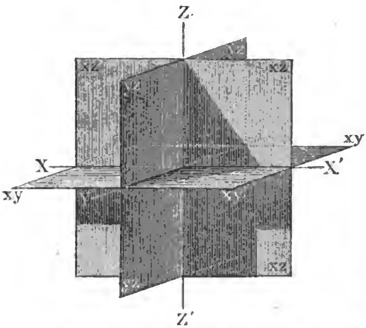
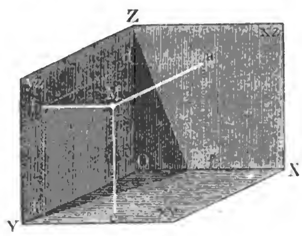


Fig. 58.



Bestimmung des Punktes. Denken wir uns von dem Punkte 33
M, Fig. 58, ein Perpendikel auf die Ebene der xz, eines auf die Ebene der yz und eines endlich auf die Ebene der xy gefällt, so sind die Punkte a, b und c, in welchen die Perpendikel die Coordinatenebenen treffen, die Projectionen des Punktes M auf die Coordinatenebenen, und zwar ist:

a die Projection des Punktes M auf die Ebene der xz
b " " " " M " " " " yz
c " " " " M " " " " xy.

Das Perpendikel Ma ist parallel mit der Axe der y, Mb ist parallel mit der Axe der x und Mc endlich ist parallel mit der Axe der z.

Die Länge jedes dieser Perpendikel, welches mit dem Buchstaben

derjenigen Axe bezeichnet wird, mit welcher es parallel läuft, mißt den Abstand des Punktes von einer der Coordinatenebenen.

$Ma = y$ ist die Entfernung des Punktes M von der Ebene der xz
$Mb = x$ » » » » » M » » » » yz
$Mc = z$ » » » » » M » » » » xy.

Wird eine Ebene gelegt durch die Linien Ma und Mc, Fig. 59, so schneidet sie die Axe der x in f.

Eine durch Mb und Mc gelegte Ebene schneidet die Axe der y in h.

Eine durch Ma und Mb gelegte Ebene schneidet die Axe der z in d.

Es ist leicht zu beweisen, daß

$$Of = bM = x$$
$$Oh = aM = y$$
$$Od = cM = z.$$

Die Lage des Punktes M ist bestimmt, sobald die Werthe seiner Coordinaten x, y und z bestimmt sind. Für den Punkt M, Fig. 59, ist z. B. $x = 12^{mm}$, $y = 34^{mm}$ und $z = 18^{mm}$. (In Betreff der Ordinaten y erinnern wir, daß dieselben in unseren Figuren mit der Hälfte ihres wahren Werthes aufgetragen sind. Dieses Verkürzungsverhältniß ist jedoch ein beliebig gewähltes.)

Fig. 59.

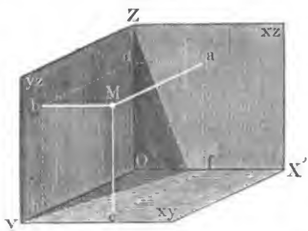
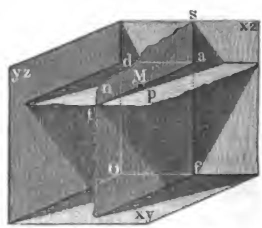


Fig. 60.



Um recht anschaulich zu machen, wie die Lage eines Punktes durch seine Coordinaten bestimmt ist, wollen wir einen Punkt M, Fig. 60, betrachten, für welchen ist:

$$x = 12^{mm}$$
$$y = 22^{mm}$$
$$z = 18^{mm}.$$

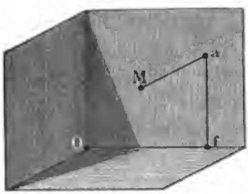
Durch die Bedingung, daß $x = 12^{mm}$ sein soll, ist ausgesprochen, daß der Punkt M in einer Ebene fn, Fig. 60, liegen müsse, welche parallel mit der Ebene der yz ist und 12^{mm} weit von ihr absteht.

Da $z = 18^{mm}$ sein soll, so liegt der Punkt M aber auch auf einer Ebene dp, welche parallel mit der Ebene der xy 18^{mm} über derselben liegt; der gesuchte Punkt M kann also nur auf der Durchschnittslinie at der beiden Ebenen fn und dp liegen.

Durch die Bedingung endlich, daß $y = 22^{mm}$ sein soll, ist aber auch noch die Lage des Punktes M auf der Linie at bestimmt, denn es soll $Ma = 22^{mm}$ sein.

Um einen Punkt M nach gegebenen Werthen von x, y und z in ein gezeichnetes Coordinatensystem aufzutragen, ist es nicht nöthig, die Ebene fn und dp, auf deren Durchschnittslinie er liegen soll, in der Weise zu zeichnen, wie es in Fig. 60 nur deshalb geschehen ist, um den Zusammenhang anschaulicher zu machen. Es genügt folgendes Verfahren: Man mache Of gleich dem gegebenen Werthe von x, errichte in f ein Perpendikel; schneide auf demselben fa gleich dem gegebenen Werthe von z ab und ziehe dann durch a eine Linie parallel mit der Axe der y, und trage auf ihr endlich aM gleich dem gegebenen Werthe von y (in der beliebig gewählten Verkürzung) auf. In dieser Weise ist in Fig. 61 der Punkt M aufgetragen, dessen Coordinaten sind $x = 20^{mm}$, $z = 15^{mm}$ und $y = 24^{mm}$ (das Verkürzungsverhältniß für y zu $1/2$ genommen).

Fig. 61.



Zur Uebung zeichne man ein Axensystem ähnlich dem in Fig. 59, nur etwas größer, und trage in demselben auf: 1) einen Punkt N, für welchen

$$x = 30^{mm},\ y = 40^{mm},\ z = 14^{mm},$$

und 2) einen Punkt T, für welchen ist

$$x = 16^{mm},\ y = 36^{mm} \text{ und } z = 25^{mm}.$$

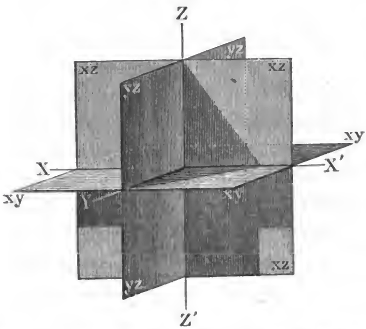
Diese Zeichnungsübungen sollen vorzugsweise dazu dienen, den Leser daran zu gewöhnen, in einer auf die Ebene des Papiers gezeichneten Figur räumliche Verhältnisse zu erkennen, was dem Anfänger oft große Schwierigkeiten macht, weshalb wir denn auch diesen Gegenstand etwas ausführlicher besprechen, als es gewöhnlich zu geschehen pflegt.

Um die Anschauung möglichst zu erleichtern, kann man auch zu einem Modell des körperlichen Ecks seine Zuflucht nehmen. Das Netz zu einem solchen Modell ist diesem Werkchen beigegeben. Bei der Zusam-

mensetzung dieses Modells ist darauf zu sehen, daß die bedruckte Seite des Papiers die innere Seite des körperlichen Ecks bilde.

Wir haben bisher nur positive Werthe von x, y und z betrachtet, es wird aber für den Leser jetzt keine Schwierigkeit mehr haben, die Bedeutung negativer Werthe von x, y oder z zu übersehen. Ein Punkt, für welchen x negativ ist, liegt links von der Ebene der yz, Fig. 62. — Ein Punkt, für welchen y negativ ist, liegt hinter der Ebene der xz, und ein Punkt endlich, für welchen z negativ ist, liegt unter der Ebene der xy.

Fig. 62.



34 **Länge und Richtung des Leitstrahles.** Der Punkt M, Fig. 63, bildet ein Eck des Langwürfels $MbhcOfad$, dessen dem Punkte M gegenüberstehendes Eck durch den Anfangspunkt O der Coordinaten gebildet wird.

Fig. 63.

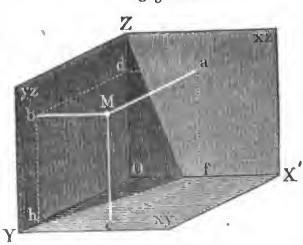
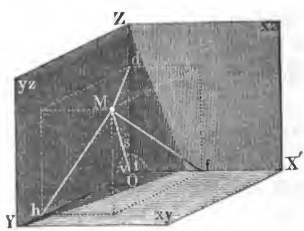


Fig. 64.



Vier Kanten dieses Langwürfels, Ma, cf, hO und bd, sind gleich y; vier andere Kanten desselben, Mb, ad, fO und ch, sind gleich x und die vier letzten endlich, Mc, af, dO und bh, sind gleich z.

Wird M mit O durch eine gerade Linie verbunden, Fig. 64, so bildet dieser Leitstrahl MO die Diagonale des eben besprochenen Langwürfels, dessen Länge wir mit R bezeichnen wollen.

Da nun x, y und z die Kantenlängen des Langwürfels sind, so ist nach §. 57 (Gleichung (2) S. 95) der Stereometrie

$$R^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

oder

$$R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Wie weit sind die Punkte M, N und T vom Anfangspunkte der Coordinaten entfernt, wenn ihre Coordinaten sind

für M	$x = 24^{mm}$	$y = 12^{mm}$	$z = 15^{mm}$
» N	$x = 30$	$y = 40$	$z = 14$
» T	$x = 16$	$y = 36$	$z = 25.$

Der Leitstrahl MO, Fig. 64, welcher in unserer Figur natürlich verkürzt erscheint, macht mit der Axe der y einen Winkel, welcher in unserer Figur mit v bezeichnet ist. Den Winkel MOZ, welchen MO mit der Axe der z macht, wollen wir mit s, und den Winkel MOX', welchen MO mit der Axe der x macht, wollen wir mit t bezeichnen.

Die Fläche $Mbhc$ steht rechtwinkelig auf der Axe der y, folglich steht auch die Diagonale Mh rechtwinkelig auf derselben; mit anderen Worten, der Winkel MhO ist ein rechter (wenn er auch in unserer Figur verkürzt erscheint) oder auch Mh ist ein von M auf die Axe der y gefälltes Perpendikel.

In gleicher Weise steht Mf rechtwinkelig auf der Axe der x und Md rechtwinkelig auf der Axe der z.

In dem bei h rechtwinkeligen Dreieck MhO ist MO die Hypotenuse, hO die dem Winkel v anliegende Kathete, folglich ist

$$\cos. v = \frac{hO}{MO} = \frac{y}{R}.$$

Ebenso ist MO die Hypotenuse des bei f rechtwinkeligen Dreiecks MfO, woraus sich ergiebt

$$\cos. t = \frac{Of}{OM} = \frac{x}{R};$$

in gleicher Weise ergiebt sich endlich

$$\cos. s = \frac{Od}{OM} = \frac{z}{R}.$$

Setzen wir für R seinen oben entwickelten Werth, so kommt

$$\cos. v = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$\cos. t = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

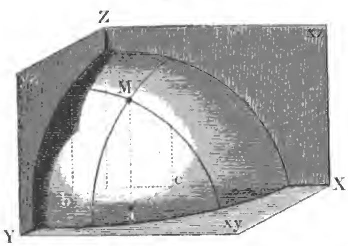
$$\cos. s = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Wie groß sind die Winkel, welche die Leitstrahlen der Punkte M, N und T, deren Coordinaten oben angegeben wurden, mit den Coordinatenaxen machen?

35 **Die Gleichung der Fläche.** Wir haben in §. 3 gesehen, daß jede Gleichung zwischen zwei Variabeln x und y, auf zwei Coordinatenaxen in der Ebene bezogen, eine Curve darstellt. Dem entsprechend stellt nun auch jede Gleichung zwischen drei Veränderlichen x, y und z, auf drei Coordinatenaxen im Raum bezogen, eine Fläche dar, wie dies die folgende Betrachtung darthun soll.

Fig. 65 zeigt ein Stück irgend einer krummen Fläche in seiner Lage zu den drei Coordinatenebenen. Denken wir uns nun ganz beliebig eine Anzahl von Punkten in der Ebene der xy bezeichnet, von denen etwa a einer sein mag, und durch jeden dieser Punkte eine Linie parallel mit der Axe der z gezogen, so wird jedes dieser Perpendikel die krumme Fläche in einem Punkte treffen, wie denn das in a errichtete Perpendikel die Fläche in dem Punkte M trifft.

Fig. 65.



Für jedes dieser Perpendikel hat nun die von der Ebene der xy an gemessene Höhe z seines in der krummen Fläche liegenden Gipfelpunktes einen ganz bestimmten Werth, welcher von einem dieser Perpendikel zum andern variirt, so also, daß die Höhe $aM = z$ eines Punktes M der krummen Fläche über der Ebene der xy als Function der Lage erscheint, welche seine Projection a in der Ebene der xy einnimmt.

Die Lage des Punktes a in der Ebene der xy ist aber durch seine Coordinaten $ab = x$ und $ac = y$ bedingt, welche zugleich die Abstände des Punktes M von der Ebene der yz und von der Ebene der xz sind; wir können also sagen: wenn der Punkt M auf einer gegebenen Oberfläche liegen soll, so ist seine Ordinate z eine Function seiner beiden anderen Coordinaten x und y, oder in Zeichen, es ist

$$z = f(x, y) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

wo die Form der Function von der Natur und Lage der krummen

Fläche abhängt. Aus der Gleichung (1) kann man aber auch eine Gleichung von der Form

$$F(x, y, z) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

ableiten, welche die allgemeinste Form einer Gleichung zwischen drei Veränderlichen x, y und z ist.

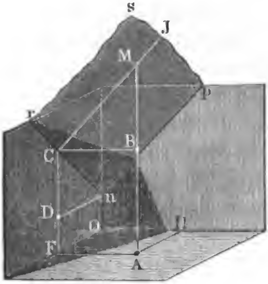
Die Form der Function hängt, wie schon bemerkt, von der Natur und der Lage der Fläche ab. Zunächst unterscheidet man algebraische Flächen, welche durch algebraische Functionen dargestellt werden, und transscendente Flächen, in deren Gleichung transscendente Functionen eintreten.

Die algebraischen Flächen werden wieder in Flächen ersten, zweiten, dritten u. s. w. Grades eingetheilt, je nachdem in ihren Gleichungen die Variabeln nur in der ersten oder auch in der zweiten, dritten u. s. w. Potenz vorkommen. Wir können uns hier nur mit einigen algebraischen Flächen beschäftigen.

Die Gleichung der Ebene. Es ist schon auf Seite 3 der Elementargeometrie bemerkt worden, daß durch Bewegung einer Linie eine Fläche entsteht, und in der That kann man regelmäßige Flächen am besten dadurch charakterisiren, daß man angiebt, wie sie durch Bewegung einer gegebenen Curve entstanden sind. 36

Eine Ebene nun kann man sich dadurch entstanden denken, daß eine gerade Linie, die Erzeugungslinie (generatrix), in der Weise fortgeschoben wird, daß sie dabei stets ihrer ursprünglichen Lage parallel bleibt und während dieser Bewegung stets an einer zweiten gegebenen Geraden, der Leitlinie (directrix), hingleitet. Aus dieser Entstehungsweise der Ebene läßt sich nun auch leicht die Gleichung derselben ableiten.

Fig. 66.



Die Ebene $npsr$, Fig. 66, kann man sich dadurch entstanden denken, daß die gerade Linie np (generatrix) mit sich selbst parallel an der Linie nr (directrix) hin fortgeschoben wird.

Die Gleichung der Linie np, als einer in der Ebene der xz liegenden Geraden, ist

$$z = ax + d,$$

wo a die trigonometrische Tangente des Winkels bezeichnet, welchen die Gerade np mit der Axe der x macht, d aber den Abstand On.

Als Directrix haben wir die in der Ebene der yz liegende Gerade nr angenommen, deren Gleichung ist

$$z = by + d,$$

wo b die trigonometrische Tangente des Winkels bezeichnet, welchen die Gerade nr mit der Axe der y macht.

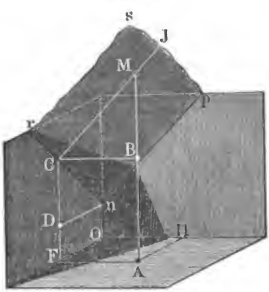
Es sei nun die Erzeugungslinie parallel mit sich selbst bis in die Lage CJ verschoben und auf ihr der Punkt M bezeichnet. Die Coordinaten dieses Punktes M sind nun $MA = z$, $FA = x$ und $AH = y$. Es kommt nun darauf an, zu ermitteln, in welcher Weise die Ordinate z abhängig ist von x und y.

Denken wir uns zunächst von C ein Perpendikel CB auf MA gefällt, so theilt dieses die Ordinate des Punktes M in zwei Theile; es ist nämlich

$$z = MA = MB + BA \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Nun ist aber CB parallel mit der Axe der x, und da ferner CJ parallel ist mit np, so ist auch a die trigonometrische Tangente des Winkels, welchen CJ mit CB macht, es ist also

Fig. 67.



$$MB = a . CB.$$

Nun ist aber $CB = FA = x$, folglich auch

$$MB = a . x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Es ist aber ferner $BA = CF$; und da C ein Punkt der Directrix nr ist, dessen Abscisse OF (gleich AF) wir mit y bezeichnen wollen, so ist offenbar

$$BA = CF = by + d \,. \quad (3)$$

Substituirt man nun in Gleichung (1) für MB und BA ihre Werthe bei (2) und (3), so kommt

$$z = ax + by + d \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

welches die gesuchte Gleichung der Ebene ist.

Jede Gleichung des ersten Grades zwischen den drei Veränderlichen x, y und z läßt sich nun auf die Form der Gleichung (4) zurückführen, jede Gleichung von der Form

$$gx + hy + kz + l = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

in welcher g, h, k und l beliebige constante Factoren bezeichnen, ist also die Gleichung einer Ebene.

Besondere Fälle. Setzen wir in Gleichung (5) $g = 0$, $h = 0$ 37
und $l = 0$, so reducirt sie sich auf

$$z = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

und dies ist die Gleichung der Ebene der xy, denn sie repräsentirt die Gesammtheit aller Punkte, für welche $z = 0$ ist.

Wird in Gleichung (5) $h = 0$, $k = 0$ und $l = 0$ gesetzt, so geht sie über in

$$x = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

welches die Gleichung für die Ebene der yz ist.

In gleicher Weise ergiebt sich

$$y = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

als Gleichung der Ebene der xz.

Wird in Gleichung (5) nur $g = 0$ und $h = 0$ gesetzt, so kommt

$$kz + l = 0$$

und daraus

$$z = -\frac{l}{k}$$

oder

$$z = m \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

wenn wir m für den Quotienten $-\frac{l}{k}$ setzen. Es ist dies die Gleichung einer Ebene, welche parallel mit der Ebene der xy in einem Abstande m über oder unter derselben liegt, je nachdem das Vorzeichen von m positiv oder negativ ist. In gleicher Weise ist

$$x = r$$

die Gleichung einer Ebene, welche parallel läuft mit der Ebene der yz und um die Länge r von ihr absteht, und endlich ist

$$y = t$$

die Gleichung einer in der Entfernung t parallel mit der Ebene der xz herlaufenden Ebene.

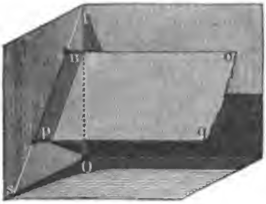
Setzen wir in Gleichung (5) $g = 0$, so kommt

$$hy + kz + l = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Nach dieser Gleichung hängt der Werth von z lediglich von der Variabeln y ab, so daß es ganz und gar gleichgültig ist, wie groß man x, welches gar nicht in der Gleichung (10) vorkommt, nehmen mag. Diese

vollkommene Gleichgültigkeit von x kann aber nur für eine Ebene statt haben, welche mit der Axe der x parallel läuft, die Gleichung (10) stellt also eine Ebene dar, welche auf der Ebene der yz rechtwinkelig steht, wie dies für die in Fig. 68 dargestellte Ebene $nopq$ der Fall ist.

Fig. 68.



Dividirt man Gleichung (10) mit k, so ergiebt sich aus ihr

$$z = -\frac{h}{k}y - \frac{l}{k}$$

oder

$$z = \alpha y + \beta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

wenn man α für $-\frac{h}{k}$ und β für $-\frac{l}{k}$ setzt. Auf die Ebene der zy allein bezogen ist dies die Gleichung einer geraden Linie sf, welche, in der Ebene der yz liegend, mit der Axe der y einen Winkel fsO macht, dessen trigonometrische Tangente α ist, und welche die Axe der z in einem Punkte f schneidet, dessen Abstand fO vom Anfangspunkte der Coordinaten gleich β ist.

Auf die Coordinaten des Raumes bezogen repräsentirt die Gleichung (11) oder die ihr äquivalente Gleichung (10) eine Ebene, welche durch die Linie sf gelegt ist und mit der Axe der x parallel läuft, oder was dasselbe ist, auf der Ebene der yz rechtwinkelig steht.

So wie np nun ein willkürlich begränztes Stück der Linie sf ist, so ist auch $nopq$ nur ein willkürlich begränztes Stück der durch Gleichung (10) dargestellten Ebene.

Setzen wir in Gleichung (5) $h = 0$, so kommt

$$gx + kz + l = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Fig. 69.

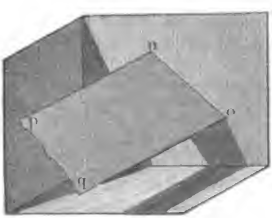
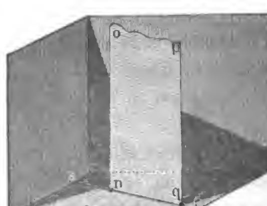


Fig. 70.



die Gleichung einer Ebene, welche, wie *nopq*, Fig. 69, mit der Axe der y parallel läuft.

Ebenso stellt endlich die Gleichung

$$gx + hy + l = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

welche man erhält, wenn man in Gleichung (5) $k = 0$ setzt, eine Ebene dar, welche, wie *nopq*, Fig. 70, auf der Ebene der xy rechtwinkelig steht, also mit der Axe der z parallel läuft.

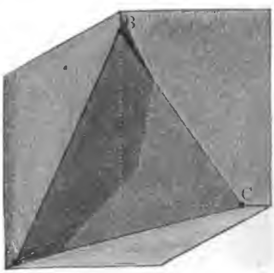
Durchschnitte einer Ebene mit den drei Coordinatenaxen. 38
Jede Ebene, welche nicht parallel läuft mit einer der drei Coordinatenaxen, muß alle drei Axen schneiden, und man findet den Durchschnittspunkt der Ebene mit der Axe der z, wenn man in der Gleichung der Ebene (Gleichung (5) $x = 0$ und $y = 0$ setzt. Es ergiebt sich alsdann

$$z = -\frac{l}{k}.$$

Um den Punkt zu finden, in welchem eine Ebene die Axe der y schneidet, hat man in der Gleichung dieser Ebene x und z gleich Null zu setzen; auf diese Weise findet man

$$y = -\frac{l}{h}.$$

Fig. 71.



Für den Durchschnittspunkt der Ebene mit der Axe der x findet man endlich

$$x = \frac{l}{g},$$

wenn man in Gleichung (5) $y = 0$ und $z = 0$ setzt.

Es sei z. B. die Gleichung einer Ebene

$$1{,}8x + 0{,}9y + 1{,}2z - 3{,}6 = 0 \quad (14)$$

Bezeichnen wir die Durchschnittspunkte dieser Ebene mit den Axen der y, der z und der x durch A, B und C, so ergiebt sich

für den Punkt A . . . . $y = +4$
» » » B . . . . $z = +3$
» » » C . . . . $x = +2$.

In Fig. 71 ist das zwischen die positiven Arme der Coordinatenaxen fallende Stück dieser Ebene dargestellt, indem man das Centimeter zur Längeneinheit gewählt hat.

Die Gleichung der geraden Linie BC, in welcher die Ebene Gleichung (14) die Ebene der xz schneidet, ergiebt sich aus Gleichung (14), wenn man in Gleichung (14) $y = 0$ setzt; man findet auf diese Weise

$$1{,}8\,x + 1{,}2\,z - 3{,}6 = 0.$$

Setzt man in Gleichung (14) $x = 0$, so findet man

$$0{,}9\,y + 1{,}2\,z - 3{,}6 = 0$$

als Gleichung der Linie AB, in welcher unsere Ebene von der Ebene der yz geschnitten wird.

Setzt man endlich in Gleichung (14) $z = 0$, so erhält man als Gleichung der Linie AC:

$$1{,}8\,x + 0{,}9\,y - 3{,}6 = 0.$$

Es sei die Gleichung einer Ebene

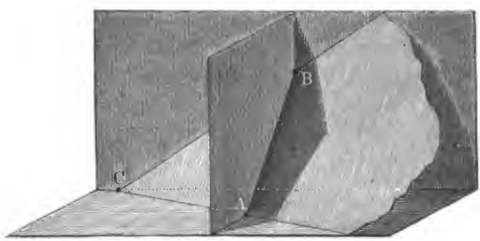
$$-1{,}2\,x + 2\,y + 1{,}8\,z - 3{,}6 = 0 \quad . \; . \; . \; . \quad (15)$$

Bezeichnen wir wiederum mit A den Durchschnittspunkt der Ebene (15) mit der Axe der y; mit B den Durchschnittspunkt derselben mit der Axe der z und mit C endlich ihren Durchschnittspunkt mit der Axe der x, so ergiebt sich

für A . . . . $y = +1{,}8$
" B . . . . $z = +2$
" C . . . . $x = -3$;

die Ebene hat also die Fig. 72 dargestellte Lage.

Fig. 72.



In gleicher Weise stellt Fig. 73 ein Stück der Ebene dar, deren Gleichung ist

$$-1{,}8\,x - 2\,y + 1{,}2\,z + 3{,}6 = 0 \quad . \; . \; . \quad (16)$$

Uebungsaufgaben. Die Gleichungen zweier Ebenen seien

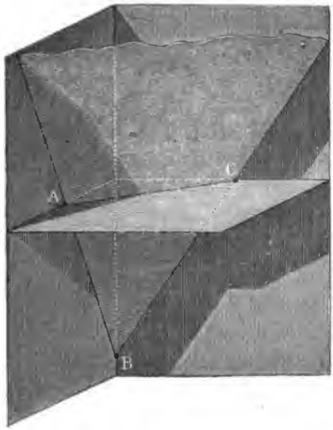
$$1{,}8\,x + 0{,}9\,y - 1{,}2\,z - 3{,}6 = 0 \quad . \; . \; . \; . \quad (17)$$

und

$$-1{,}8\,x + 0{,}9\,y + 1{,}2\,z + 3{,}6 = 0 \quad . \; . \; . \; . \quad (18)$$

In welchen Punkten schneidet jede dieser Ebenen die Coordinatenaxen. Welches sind die Gleichungen der geraden Linien, in welchen jede dieser

Fig. 73.



Ebenen die drei Coordinatenebenen schneidet? — Wenn diese Fragen beantwortet sind, stelle man jede dieser Ebenen durch Zeichnung nach der Methode dar, wie es in Fig. 71, 72 und 73 für die Gleichungen (14), (15) und (16) geschehen ist.

Die Gleichungen der geraden Linie. Zwei ebene Flächen, 39
deren Gleichungen sein mögen

$$a x + b y + c z + d = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

und

$$a' x + b' y + c' z + d' = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

schneiden sich stets in einer geraden Linie, wenn nicht etwa die beiden Ebenen (1) und (2) einander parallel sind, was nur der Fall ist, wenn $a = a'$, $b = b'$, $c = c'$ und $d = d'$.

Die Combination zweier Gleichungen der Art, wie die Gleichungen (1) und (2), stellt also stets eine gerade Linie im Raume dar.

Um die Lage der Durchschnittslinien zweier gegebenen Ebenen leichter übersehen zu können, leitet man aus den gegebenen Gleichungen zwei andere ab, deren jede nur zwei Variabeln enthält. Multiplicirt man

Gleichung (1) mit a', Gleichung (2) aber mit a, so gelangt man durch Subtraction zu der Gleichung

$$(a'b - ab')\, y + (a'c - ac')\, z + a'd - ad' = 0,$$

die wir einfach

$$\beta y + \gamma z + \delta = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

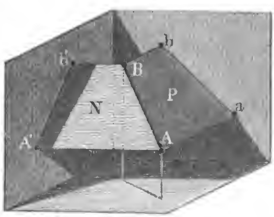
schreiben wollen. Multiplicirt man dagegen die erste Gleichung mit b', die zweite mit b, so gelangt man auf demselben Wege zu einer Gleichung von der Form

$$\alpha' x + \gamma' z + \delta' = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Da die Gleichungen (3) und (4) aus den Gleichungen (1) und (2) abgeleitet sind, so müssen auch dieselben zusammengehörigen Werthe von x, y und z, welche den beiden Gleichungen (1) und (2) genügen, zugleich den beiden Gleichungen (3) und (4) Genüge leisten, oder mit anderen Worten: die Ebenen Gleichung (3) und Gleichung (4) schneiden sich in denselben Geraden, in welchen sich die Ebenen Gleichung (1) und Gleichung (2) schneiden. Die Lage der Ebenen (3) und (4) ist aber leichter zu übersehen, weil ihre Gleichungen nur zwei Variabeln enthalten, weil also sowohl die Ebene Gleichung (3) als auch die Ebene Gleichung (4) auf einer der Coordinatenebenen rechtwinkelig steht.

Gleichung (3) stellt eine Ebene dar, welche wie die mit N bezeichnete Ebene der Fig. 74 auf der Ebene der yz rechtwinkelig steht, während die Gleichung (4) einer auf der Ebene der xz rechtwinkelig stehenden Ebene, etwa der Ebene P, Fig. 74, angehört. AB ist die Durchschnittslinie der beiden Ebenen, welche in unserer Figur nur deshalb begränzt erscheint, weil auch von den sich in AB schneidenden Ebenen nur ein willkürlich begränztes Stück in unserer Figur gezeichnet ist.

Fig. 74.



Auf die Ebene der xz bezogen stellt Gleichung (4) die Projection der Linie AB auf die Ebene der xz dar, wie denn auch die Projection der Linie AB auf die Ebene der yz durch die Gleichung (3) dargestellt wird.

Wenn also die Gleichungen zweier Ebenen gegeben sind, so kann man aus denselben nach dem obigen Verfahren die Projectionen ihrer Durchschnittslinie auf die Ebene der xz und der yz ermitteln.

In gleicher Weise hätte man auch die Projection der Durchschnittslinie auf der Ebene der xy finden können.

Um das eben Besprochene zu erläutern, wollen wir die Projectionen der Linie suchen, in welcher sich die schon im vorigen Paragraphen besprochenen Ebenen

$$1{,}8x + 0{,}9y + 1{,}2z - 3{,}6 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

und

$$-1{,}2x + 2y + 1{,}8z - 3{,}6 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

schneiden. Eliminirt man x aus diesen beiden Gleichungen, so kommt

$$4{,}68y + 4{,}68z - 10{,}8 = 0$$

oder

$$z = -y + 2{,}3 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

als Projection der Durchschnittslinie auf die Ebene der yz.

Durch Elimination von y aus den Gleichungen (5) und (6) ergiebt sich

$$z = -6{,}9x + 5{,}0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

für die Projection der Durchschnittslinie auf die Ebene der xz.

Für die Projection der besprochenen Durchschnittslinie auf die Ebene der xy ergiebt sich endlich durch Elimination von z aus den Gleichungen (5) und (6)

$$y = 6x - 2{,}7 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Zur Uebung zeichne man in ein Axenschema wie das der Fig. 72 nicht allein die Ebene Gleichung (6) ein, sondern auch die Ebene Gleichung (5), ziehe dann die Durchschnittslinie der beiden Ebenen und bestimme auch in der Figur die Projectionen der Durchschnittslinie auf die drei Coordinatenebenen.

In gleicher Weise berechne und zeichne man die Projectionen der geraden Linie, in welcher sich die durch Gleichung (14) und (17) in Seite 82 dargestellten Ebenen schneiden. Ferner bestimme man die Durchschnittslinie der Ebenen Gleichung (16) und Gleichung (17) u. s. w.

Die Gleichungen des Punktes. Je zwei Ebenen schneiden sich in einer geraden Linie, jede gerade Linie schneidet aber eine Ebene in einem Punkte, wenn nicht die gerade Linie mit der Ebene parallel läuft. Wenn man also die beiden Gleichungen einer geraden Linie mit der Gleichung einer Ebene combinirt, so wird man durch die Combination dieser drei Gleichungen die Coordinaten des Durchschnittspunktes erhalten. Es seien z. B. 40

$$ax + by + cz + d = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

$$a'x + b'y + c'z + d' = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

die beiden Gleichungen einer geraden Linie und

$$a''x + b''y + c''z + d'' = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

die Gleichung einer Ebene.

Die Combination dieser drei Gleichungen liefert für jede der drei Unbekannten x, y und z einen speciellen Werth, und diese Werthe von x, y und z, welche gleichzeitig den Gleichungen (1), (2) und (3) genügen, sind die Coordinaten des Punktes, in welchem die Ebene Gleichung (3) von der Linie Gleichung (1) und (2) getroffen wird, oder mit anderen Worten die Coordinaten des Punktes, in welchem sich die drei Ebenen schneiden, welche durch die Gleichungen (1), (2) und (3) dargestellt sind.

Die Combination dreier Gleichungen ersten Grades zwischen den drei Veränderlichen x, y und z stellt also stets einen Punkt im Raume dar.

Combinirt man z. B. die Gleichungen (14), (15) und (16) in Seite 82, so findet man als Coordinaten des Punktes, in welchem sich die drei durch jene Gleichungen dargestellten Ebenen schneiden,

$$x = 0{,}74$$
$$y = 1{,}57$$
$$z = 0{,}73.$$

Zur Uebung berechne man die Coordinaten des Punktes, in welchem sich die durch die Gleichungen (14), (15) und (17), Seite 82, dargestellten Ebenen schneiden. Ebenso den Durchschnittspunkt der Ebenen Gleichung (14), (16) und (18) u. s. w.

41 **Durchschnittspunkte gerader Linien.** Während zwei in derselben Ebene liegende gerade Linien sich jedenfalls in einem Punkte oder zwei ebene Flächen sich jedenfalls in einer geraden Linie schneiden (den Fall des Parallelismus ausgenommen), können zwei gerade Linien im Raum neben einander herlaufen, ohne sich zu schneiden.

Es seien

$$\begin{cases} x = \mathfrak{a}z + \alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1) \\ y = \mathfrak{b}z + \beta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2) \end{cases}$$

die Gleichungen der geraden Linie AB, Fig. 75, oder mit anderen Worten: es sei (1) die Gleichung der Projection ab der Linie AB auf die Ebene der xz und (2) die Gleichung ihrer Projection auf die Ebene der yz. Es seien ferner

$$\begin{cases} x = \mathfrak{a}'z + \alpha' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3) \\ y = \mathfrak{b}'z + \beta' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4) \end{cases}$$

in gleichem Sinne die Gleichungen der Linie CD. Combinirt man die Gleichungen (1) und (2) mit Gleichung (3), so erhält man die Coordinaten x', y' und z' des Punktes P, in welchem die Linie AB die Ebene

Fig. 75.

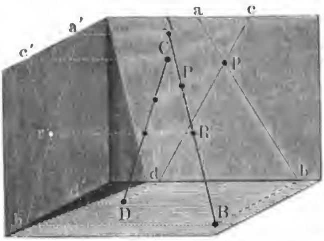
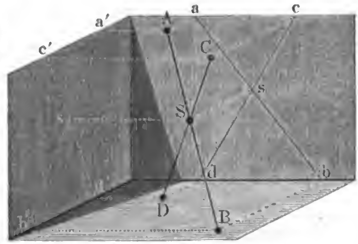


Fig. 76.



Gleichung (3) (also die Ebene $CDcd$) trifft; also zunächst für die Höhe des Punktes P über der Ebene der xy aus der Gleichsetzung der Werthe von x in Gleichung (1) und (3)

$$z' = \frac{\alpha - \alpha'}{\mathfrak{a}' - \mathfrak{a}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

Combinirt man in gleicher Weise die Gleichungen (1), (2) und (4), so erhält man die Coordinaten x'', y'' und z'' des Punktes R, in welchem die Linie AB die (natürlich über die Gränzen des Vierecks $CDc'd$, erweiterte) Ebene $CDc'd'$ trifft und zunächst für die Höhe des Punktes R über der Ebene der xy

$$z'' = \frac{\beta - \beta'}{\mathfrak{b}' - \mathfrak{b}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6)$$

Da nun die Factoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}'$, α, α', $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}'$, β und β' ganz unabhängig von einander sind, so werden im Allgemeinen die Werthe von z' und z'' ungleich sein, die Punkte P und R also in verschiedener Höhe über der Ebene der xy liegen. Eine Durchschneidung der beiden Linien AB und CD ist aber offenbar nur dann möglich, wenn die beiden Punkte P und R in einen einzigen zusammenfallen, wenn also $z' = z''$, woraus sich für die Durchschneidung der beiden Linien die Bedingungsgleichung

$$\frac{\alpha - \alpha'}{\mathfrak{a}' - \mathfrak{a}} = \frac{\beta - \beta'}{\mathfrak{b}' - \mathfrak{b}}$$

ergiebt.

Es seien z. B. die Gleichungen einer geraden Linie

$$\left.\begin{array}{l} x = 1{,}5\,z - 1 \\ y = 0{,}4\,z - 3 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(A)}$$

Die Gleichungen einer zweiten Linie seien

$$\left.\begin{array}{l} x = \quad 2\ \ z + 0{,}5 \\ y = -\,0{,}6\,z + 1 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(B)}$$

Die Gleichungen einer dritten Linie endlich seien

$$\left.\begin{array}{l} x = -\,0{,}5\,z + 3 \\ y = -\,1{,}2\,z + 0{,}2 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(C)}$$

Welche dieser drei Linien schneiden sich und welche schneiden sich nicht?

Wenn die Gleichungen zweier geraden Linien im Raum gegeben sind, so kann man den Winkel berechnen, welchen sie mit einander machen, und in ähnlicher Weise, wie es für die Linien in der Ebene geschehen ist, kann man eine Bedingungsgleichung entwickeln, welche erfüllt sein muß, wenn zwei gerade Linien im Raum einen rechten Winkel mit einander machen sollen. Wir wollen diese Fragen nur erwähnen, ohne auf ihre Lösung hier weiter einzugehen.

Zweites Kapitel.

Krumme Oberflächen.

---

42 **Entstehung regelmässiger Oberflächen.** Die regelmäßigen Oberflächen lassen sich am zweckmäßigsten durch die Art ihrer Entstehung, durch die Bewegung einer gegebenen Curve definiren. Man unterscheidet in dieser Beziehung hauptsächlich drei Arten von Oberflächen, nämlich:

1. Cylindrische Oberflächen, welche dadurch entstehen, daß man eine gerade Linie, die Erzeugungslinie (generatrix), parallel mit sich selbst in der Weise fortschiebt, daß sie bei dieser Bewegung stets an einer gegebenen Curve (Leitlinie, directrix) hingleitet.

2. Konische oder Kegeloberflächen werden dadurch erzeugt, daß eine gerade Linie stets durch einen und denselben festen Punkt gehend an einer gegebenen Leitlinie hergeführt wird.

3. Rotationsflächen sind Flächen, welche dadurch entstehen, daß eine gegebene Curve um eine feste Axe umgedreht wird.

Wir wollen nun in den folgenden Paragraphen die wichtigsten der hierher gehörigen Oberflächen betrachten.

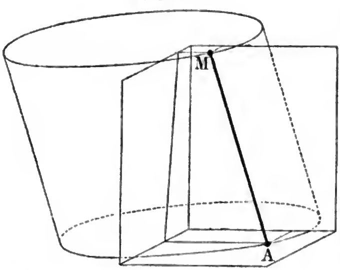
Cylindrische Flächen. Die Gleichungen der Erzeugungslinie 43
MA, Fig. 77, seien

$$\left.\begin{array}{l} x = az + \alpha \\ y = bz + \beta \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Da diese Linie parallel mit sich fortgeschoben wird, so bleiben a und b stets dieselben, während α und β sich stetig ändern, wenn die Linie nach und nach ihre Lage ändert.

Setzt man in den beiden Gleichungen (1) $z = 0$, so kommt $x = \alpha$ und $y = \beta$, es sind also α und β offenbar die Coordinaten des Punktes A, in welchem die Erzeugungslinie bei einer speciellen Lage die Ebene der xy trifft, eines Punktes, welcher natürlich seine Lage in der Ebene der xy ändert, wenn die Erzeugungslinie fortgeschoben wird.

Fig. 77.



Nehmen wir nun der Einfachheit wegen an, die Leitlinie sei eine in der Ebene der xy liegende Curve, so ist der Punkt A ein Punkt der Leitlinie und er soll bei dem Fortschieben der Erzeugungslinie die Directrix beschreiben. Da wir die Coordinaten dieses Punktes mit α und β bezeichnet haben, so ist

$$\beta = f(\alpha) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

die Gleichung der directrix.

Die cylindrische Oberfläche ist nun eine solche, welche den durch die beiden Gleichungen bei (1) und der Gleichung bei (2) ausgesprochenen Bedingungen zugleich Genüge leisten soll, wir werden also die Gleichung der cylindrischen Oberfläche dadurch erhalten, daß wir die drei Gleichungen combiniren und durch diese Combination α und β eliminiren. Aus den beiden Gleichungen bei (1) ergiebt sich

$$\left.\begin{array}{l} \alpha = x - az \\ \beta = y - bz \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

und wenn man diese Werthe in Gleichung (2) substituirt

$$y - bz = f(x - az) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

als allgemeinste Form der Gleichung einer Cylinderfläche.

Es sei z. B. die Leitlinie ein Kreis, welcher in der Ebene der xy liegend den Anfangspunkt der Coordinaten zum Mittelpunkte hat, wie dies bei der Fig. 77 dargestellten Cylinderfläche wirklich der Fall ist, so würde Gleichung (2) werden

$$\alpha^2 + \beta^2 = r^2,$$

wenn r den Radius des Kreises bezeichnet. Setzt man in dieser Gleichung für α und β ihre Werthe bei (3), so kommt

$$(x - az)^2 + (y - bz)^2 = r^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

als Gleichung einer schiefen Cylinderfläche von kreisförmiger Basis. Für den Fall, daß die Erzeugungslinie mit der Axe der z parallel läuft, wird $a = 0$ und $b = 0$, und aus Gleichung (5) wird für diesen Fall

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

welches die Gleichung eines geraden Cylinders von kreisförmiger Basis ist, dessen Axe durch die Axe der z gebildet wird. Da z in dieser Gleichung (6) gar nicht vorkommt, so bleibt es stets willkürlich, welches auch die zusammengehörigen, der Gleichung (6) genügenden Werthe von x und y sein mögen.

Die Gleichung eines Cylinders von kreisförmiger Basis, dessen Axe durch die Axe der x gebildet wird, ist

$$z^2 + y^2 = r^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

während

$$z^2 + x^2 = r^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

auf drei rechtwinkelige Coordinatenaxen im Raum bezogen die Gleichung eines Cylinders von kreisförmiger Basis ist, dessen Axe mit der Axe der y zusammenfällt.

Wird die Leitlinie zur geraden Linie, so geht die Cylinderfläche in eine Ebene über, oder mit anderen Worten die Ebene ist eine Cylinderfläche, deren Leitlinie eine gerade ist, und aus dieser Definition muß man auch die Gleichung der Ebene ableiten können.

Setzen wir in der That für die Gleichung (2) der Leitlinie

$$\alpha - c\beta + d = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

wo c und d constante Factoren bezeichnen; setzen wir dann in diese Gleichung (9) für α und β ihre Werthe bei (3), so kommt

$$x - az - c(y - bz) + d = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

eine Gleichung, welche in Beziehung auf x, y und z vom ersten Grade, also die Gleichung einer Ebene ist.

Konische Oberflächen. Konische Flächen oder Kegelflächen 44 werden durch die Bewegung einer Geraden erzeugt, welche stets durch einen festen Punkt geht, dessen Coordinaten a, b und c sind, welche aber bei ihrer Drehung um diesen Punkt stets an einer gegebenen Leitlinie hergeführt wird.

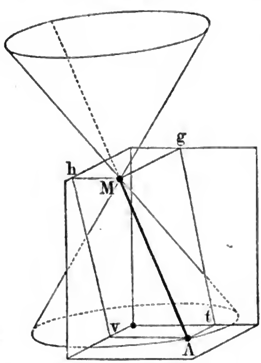
In Fig. 78 sei M der feste Punkt, durch welchen die Erzeugungslinie stets gehen soll. Die Coordinaten desselben seien

$$Mh = a$$
$$Mg = b$$

und die Höhe des Punktes M über der Ebene der $xy = c$.

Es sei ferner MA die Erzeugungslinie in einer der verschiedenen Lagen, welche sie annehmen kann, so sind gt und hv ihre Projectionen auf die Ebenen der xz und der yz und die Gleichungen dieser Projectionen

Fig. 78.



$$(x - a) = \alpha (z - c) \quad . \quad . \quad (1)$$

und

$$(y - b) = \beta (z - c) \quad . \quad . \quad (2)$$

Hier sind a und b unveränderliche Größen, während α und β ihre Werthe ändern, wenn die Erzeugungslinie in eine andere Lage übergeführt wird.

Bezeichnen wir mit x' und y' die Coordinaten des Punktes A, in welchem die Erzeugungslinie die Ebene der xy trifft, so finden wir die Werthe von x' und y', wenn wir in Gleichung (1) und (2) $z = 0$ setzen. Es ergiebt sich auf diese Weise

$$\left.\begin{aligned} x' &= a - \alpha c \\ y' &= b - \beta c \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Nun aber soll die Erzeugungslinie so geführt werden, daß der Punkt A stets in einer Curve bleibt, für deren Gleichung wir

$$y' = f(x') \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

annehmen wollen. Setzen wir in diese Gleichung (4) die Werthe von x' und y' aus (3), so kommt

$$(b - \beta c) = f(a - \alpha c) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

und in dieser Gleichung hat man nur die Werthe von α und β zu substituiren, welche sich aus den Gleichungen (1) und (2) ergeben, nämlich

$$\left.\begin{array}{l} \alpha = \dfrac{x - a}{z - e} \\ \text{und} \\ \beta = \dfrac{y - b}{z - c} \end{array}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6)$$

um die Gleichung der konischen Oberfläche zu erhalten.

Es sei z. B. die Leitlinie ein in der Ebene der xy liegender Kreis, dessen Mittelpunkt mit dem Anfangspunkt der Coordinaten zusammenfällt, so wird Gleichung (4)

$$x'^2 + y'^2 = r^2.$$

Setzen wir in diese Gleichung für x' und y' ihre Werthe bei (3), so kommt

$$(a - \alpha c)^2 + (b - \beta c)^2 = r^2.$$

Substituirt man in dieser Gleichung für α und β ihre Werthe bei (6), so kommt

$$\left(a - \frac{x - a}{z - c}\, c\right)^2 + \left(b - \frac{y - b}{z - c}\, c\right)^2 = r^2$$

und nach einigen Umformungen

$$r^2 (z - c)^2 = (az - cx)^2 + (bz - cy)^2$$

für die Gleichung eines schiefen Kegels von kreisförmiger Basis. Soll der Kegel ein gerader sein, so muß sein Scheitel M auf der Axe der z liegen, also $a = 0$ und $b = 0$ sein, mithin ergiebt sich

$$r^2 (z - c)^2 = (x^2 + y^2)\, c^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (7)$$

als Gleichung des geraden Kegels von kreisförmiger Basis, wenn c die Höhe des Scheitelpunktes über der Ebene der xy und r der Radius des in der Ebene der xy liegenden Leitkreises ist.

Läge der Leitkreis, dessen Radius gleich r, in der Ebene der yz und der Scheitel des Kegels auf der Axe der x, um die Länge c vom Anfangspunkt der Coordinaten entfernt, so wäre die Gleichung des Kegels

$$r^2 (x - c)^2 = (z^2 + y^2)\, c^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (8)$$

15 **Rotationsoberflächen.** Mit dem Namen der Rotationsoberflächen oder der Umdrehungsoberflächen bezeichnet man solche

Oberflächen, welche man sich durch Umdrehung einer beliebigen Curve, der Erzeugungslinie oder generatrix, um eine feste Axe entstanden denken kann.

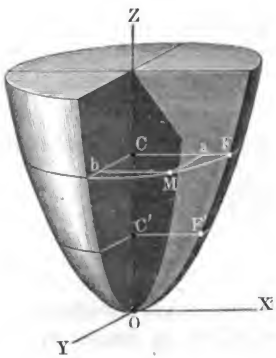
Man kann sich die Rotationsflächen auch in der Weise entstanden denken, daß ein Kreis, dessen Ebene senkrecht auf einer festen Axe steht, parallel mit sich selbst in der Weise verschoben wird, daß dabei der Mittelpunkt des Kreises stets auf der Axe bleibt, sein Radius aber so ab- oder zunimmt, daß seine Peripherie stets eine gegebene Curve schneidet, wie dies durch Fig. 79 erläutert wird, in welcher die Axe der z zugleich die Axe bildet, welche sämmtliche Kreismittelpunkte verbindet.

Nach dieser letzteren Definition läßt sich nun auch leicht die allgemeine Form der Gleichung der Umdrehungsoberflächen ableiten. Ein jeder Punkt M einer solchen Oberfläche gehört einem Kreise an, dessen Radius $CM = CF$ wir mit r bezeichnen wollen. Bezeichnen wir nun mit x und y die Coordinaten Ca und Cb des Punktes M, so haben wir

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Der Radius $CF = r$ ändert sich aber mit dem Abstand $CO = z$, oder mit anderen Worten es ist r eine Function von z, d. h. in Zeichen

Fig. 79.



$$r = f(z) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Die Gleichung (2) ist aber die Gleichung der Curve $OF'F$, durch deren Umdrehung man unsere Oberfläche entstanden denken kann, wenn man mit r die Ordinate CF des Punktes F bezeichnet, welche der Abscisse $OC = z$ entspricht. Die Gleichung der Rotationsoberfläche ergiebt sich aber, wenn man in Gleichung (1) für r seinen Werth aus Gleichung (2) setzt. Es kommt alsdann

$$x^2 + y^2 = f(z)^2 \quad . \quad (3)$$

als die allgemeinste Form der Gleichung einer Rotationsoberfläche.

Nehmen wir z. B. an, die Erzeugungscurve sei ein Kreis, dessen Radius R ist, so würde Gleichung (2) die specielle Form

$$r^2 = R^2 - z^2$$

annehmen; wird aber dieser Werth von r^2 in Gleichung (1) substituirt, so kommt

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

als Gleichung einer Kugel, deren Mittelpunkt mit dem Anfangspunkt der Coordinaten zusammenfällt und deren Radius gleich R ist.

Die Erzeugungscurve sei eine Parabel, deren Axe mit der Axe der z und deren Scheitel mit dem Anfangspunkt der Coordinaten zusammenfällt, so ist ihre Gleichung

$$r^2 = az,$$

folglich die Gleichung des Umdrehungsparaboloids (wie ein solches in Fig. 79 dargestellt ist)

$$x^2 + y^2 = az \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

46 **Rotationsellipsoide.** Wenn eine Ellipse entweder um ihre große oder um ihre kleine Axe umgedreht wird, so entsteht ein Umdrehungsellipsoid.

Die Gleichung einer Ellipse, deren kleine Axe mit der Axe der z zusammenfällt und für welche wir die in der Richtung der großen Axe A gemessenen Abscissen mit r bezeichnen wollen, ist

$$A^2 z^2 + B^2 r^2 = A^2 B^2$$

und daraus

$$r^2 = \frac{A^2}{B^2}(B^2 - z^2);$$

setzt man diesen Werth von r^2 in Gleichung (1) des vorigen Paragraphen, so kommt

$$x^2 + y^2 = \frac{A^2}{B^2}(B^2 - z^2)$$

oder

$$B^2(x^2 + y^2) + A^2 z^2 = A^2 B^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

als Gleichung eines Rotationsellipsoids, welches durch Umdrehung einer Ellipse um ihre kleine, senkrecht zur Ebene der xy stehende Axe entstanden ist.

Fig. 80 stellt ein solches Rotationsellipsoid dar, dessen Umdrehungsaxe die Länge $B = 2^{cm}$ hat, während $A = 3^{cm}$ ist.

Wird eine Ellipse, deren große Axe A senkrecht steht auf der Ebene der yz, um diese große Axe umgedreht, so entsteht ein Umdrehungsellipsoid

von der in Fig. 81 dargestellten Form, als dessen Gleichung man nach der soeben erläuterten Methode

$$A^2(y^2 + z^2) + B^2x^2 = A^2B^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

findet.

Fig. 80.

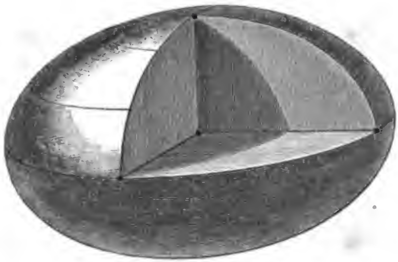
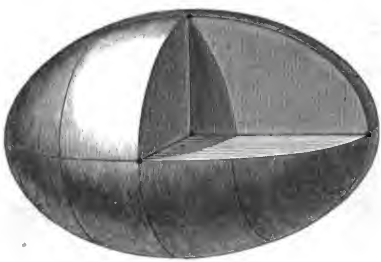


Fig. 81.



Umdrehungshyperboloide. Wird in Gleichung (5) des vorigen 47
Paragraphen das Vorzeichen von B^2 gewechselt, so kommt

$$A^2z^2 - B^2(x^2 + y^2) = - A^2B^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

als Gleichung eines Rotationshyperboloids, welches durch Umdrehung einer Hyperbel um seine Nebenaxe entstanden ist. Fig. 82 (a. f. S.) stellt ein solches Hyperboloid dar, für welches $A = 1{,}5$ und $B = 0{,}8^{\text{cm}}$ ist.

Durch Vertauschung des Vorzeichens von B^2 in Gleichung (6) ergiebt sich

$$A^2(y^2 + z^2) - B^2x^2 = - A^2B^2 \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

welches die Gleichung einer Oberfläche ist, welche durch Umdrehung einer Hyperbel um ihre Hauptaxe entstanden ist. Ein solches Umdrehungs-

Fig. 82.

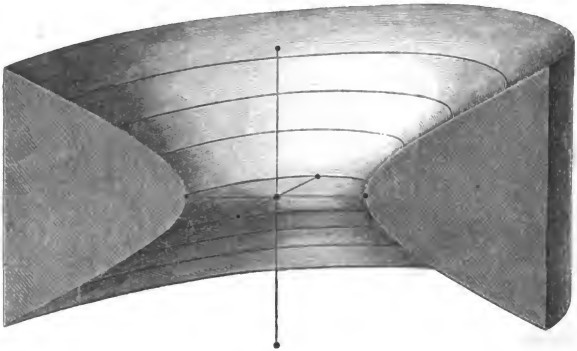
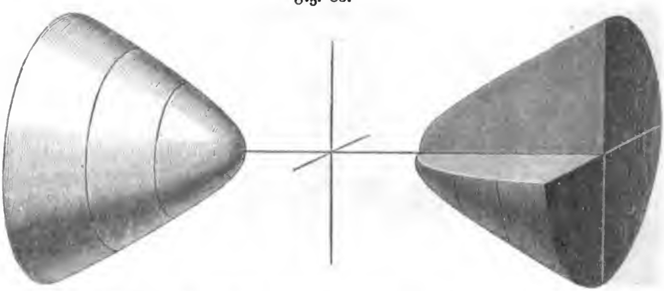


Fig. 83.



hyperboloid ist in Fig. 83 dargestellt, und zwar gleichfalls für $A = 1{,}5$ und $B = 0{,}8^{\mathrm{cm}}$.

Drittes Kapitel.

Durchschneidung krummer Oberflächen mit ebenen Flächen.

Einfach und doppelt gekrümmte Curven. Gleichwie die Combination der Gleichungen zweier ebenen Flächen die Durchschnittslinie derselben darstellt, so wird allgemein die Combination zweier Gleichungen mit den Variabeln x, y und z die Durchschnittslinie repräsentiren, in welcher sich die beiden durch die fraglichen Gleichungen definirten krummen Flächen schneiden. 48

Es seien z. B.

$$f(x, y, z) = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

und

$$F(x, y, z) = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

die Gleichungen zweier krummen Oberflächen, so wird die Gesammtheit aller Punkte, deren Coordinaten zugleich den beiden Gleichungen (1) und (2) Genüge leisten, die Durchschnittslinie der beiden Flächen (1) und (2) sein.

Im Allgemeinen wird die Durchschnittslinie zweier krummen Oberflächen nicht in einer Ebene enthalten sein, und in diesem Falle haben wir mit einer Curve doppelter Krümmung zu thun. Curven einfacher Krümmung sind solche Curven, deren Punkte sämmtlich in einer und derselben Ebene liegen.

Curven einfacher Krümmung entstehen jederzeit bei Durchschneidung einer krummen Oberfläche mit einer Ebene.

Wir müssen uns hier auf die Betrachtung der wichtigsten Fälle von Durchschneidung krummer Flächen mit ebenen beschränken.

Durchschnitt krummer Oberflächen mit den Coordinatenebenen. Der einfachste Fall der Durchschneidung krummer Oberflächen mit Ebenen ist derjenige, in welchem die schneidende Ebene eine Coordinatenebene selbst ist, weil in diesem Falle ihre Gleichung eine sehr einfache Gestalt annimmt, wie wir aus §. 37 wissen. 49

Es sei

$$f(x, y, z) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

die Gleichung einer krummen Oberfläche, so hat man in derselben nur

$$x = 0$$

zu setzen, um die Gleichung der Durchschnittslinie der krummen Oberfläche mit der Ebene der zy zu finden. Man hat dagegen in Gleichung (1)

$$z = 0$$

oder

$$y = 0$$

zu setzen, wenn man die Gleichung der Curve haben will, in welcher die krumme Oberfläche durch die Ebene der xy oder durch die Ebene der xz geschnitten wird.

Einige Beispiele mögen dies erläutern.

1. Die Gleichung eines geraden Kegels ist nach §. 45

$$r^2 (z - c)^2 = (x^2 + y^2) c^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Setzen wir in dieser Gleichung $z = 0$, so kommt

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Der Durchschnitt des Kegels mit der Ebene der xy ist also, wie vorauszusehen war, ein Kreis vom Halbmesser r.

Setzen wir in Gleichung (2) $y = 0$, so kommt

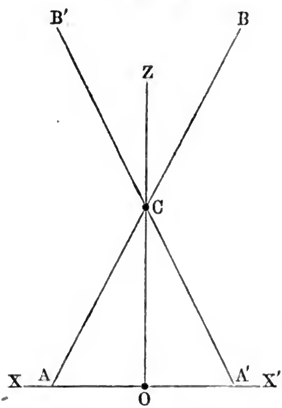
$$r^2 (z - c)^2 = x^2 c^2$$

$$x^2 = \frac{r^2}{c^2} (z - c)^2$$

oder

$$x = \pm \frac{r}{c} (z - c) \quad . \quad . \quad (3)$$

Fig. 84.



Diese Gleichung repräsentirt aber, je nachdem man das obere oder untere Vorzeichen nimmt, die gerade Linie AB oder $A'B'$, Fig. 84, in welcher $OA = OA' = r$ und $OC = c$ aufgetragen ist. Wenn also die Axe eines geraden Kegels mit der Axe der z zusammenfällt, so ist der Durchschnitt des Kegels mit der Ebene der zx ein System zweier geraden Linien, die sich unter einem Winkel schneiden, dessen Werth von den Größen r und c abhängt.

2. Wie wir in §. 48 gesehen haben, ist

$$A^2(y^2 + z^2) - B^2x^2 = - A^2B^2$$

die Gleichung eines Umdrehungshyperboloids, Fig. 83, dessen Umdrehungsaxe mit der Axe der x zusammenfällt. Um die Gleichung der Curve zu erhalten, in welcher dieses Hyperboloid von der Ebene der xy geschnitten wird, hat man in obiger Gleichung nur $z = 0$ zu setzen und erhält dann für die gesuchte Gleichung der Durchschnittscurve

$$A^2y^2 - B^2x^2 = - A^2B^2,$$

welches bekanntlich die Gleichung einer Hyperbel ist.

Durchschnitte krummer Oberflächen mit Ebenen, welche 50
den Coordinatenebenen parallel laufen. Setzen wir in der Gleichung einer krummen Oberfläche $x = \alpha$ oder $y = \beta$ oder $z = \gamma$, wo α, β und γ beliebige constante Größen bezeichnen, so erhalten wir die Gleichung der Durchschnittscurve der krummen Oberfläche mit einer Ebene, welche in einem bestimmten Abstande mit einer der Coordinatenebenen parallel läuft. Einige Beispiele mögen dies erläutern.

I. Es ist z. B. die Gleichung einer Kugel

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

setzen wir

$$x = \alpha \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

so erhalten wir

$$y^2 + z^2 = R^2 - \alpha^2 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

als Gleichung der Durchschnittscurve der Kugel mit einer Ebene, welche parallel der Ebene der yz um die Länge α von ihr absteht. Diese Gleichung (3) ist aber die Gleichung eines Kreises, dessen Radius ist $\sqrt{R^2 - \alpha^2}$. Je größer also α wird, d. h. je weiter sich die schneidende Ebene vom Mittelpunkt der Kugel entfernt, desto kleiner wird der Kreishalbmesser $\sqrt{R^2 - \alpha^2}$; er wird gleich 0 für $\alpha = R$ und imaginär für $\alpha > R$.

Ebenso findet man, daß der Durchschnitt einer Kugel mit einer Ebene, welche der Ebene der xy oder der Ebene der zy parallel läuft, stets ein Kreis ist.

Um den Verlauf einer krummen Oberfläche zu übersehen, ist es sehr zweckmäßig, sie durch eine Reihe von Ebenen durchschnitten zu denken, welche den Coordinatenebenen parallel laufen, und für jede dieser Durchschnittsebenen die Gestalt der Durchschnittscurve zu ermitteln.

II. Die Gleichung eines geraden Kegels, dessen Axe mit der Axe der z zusammenfällt, ist

$$r^2 (z - c)^2 = (x^2 + y^2) c^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Daß der Durchschnitt dieses Kegels mit Ebenen, welche der Ebene der xy parallel laufen, stets ein Kreis sein muß, läßt sich leicht voraussehen und nachweisen, wenn man in Gleichung (4) $z = \gamma$ setzt.

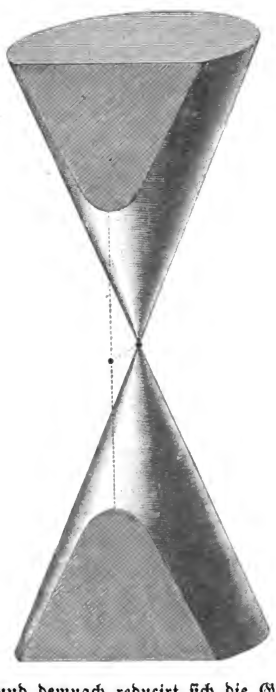
Die Gleichung einer Ebene, welche parallel läuft mit der Ebene der xz, ist

$$y = \beta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Combiniren wir Gleichung (4) mit Gleichung (5), d. h. setzen wir in Gleichung (4) $y = \beta$, so kommt

$$r^2 (z - c)^2 = x^2 c^2 + \beta^2 c^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 6)$$

Fig. 85.



als Gleichung der Durchschnittscurve der besagten Ebene mit dem Kegel. Um diese Gleichung auf eine einfachere Form zu bringen, wollen wir den Anfangspunkt der Coordinaten verlegen, und zwar wollen wir ihn in die Höhe der Spitze des Kegels legen, ihn also um die Länge c hinaufschieben, was dadurch geschieht, daß wir in Gleichung (6) z an die Stelle von $z - c$ setzen. Es kommt alsdann

$$r^2 z^2 = x^2 c^2 + \beta^2 c^2$$

$$x^2 c^2 - r^2 z^2 = - \beta^2 c^2 \quad . \quad (7)$$

welches offenbar die Gleichung einer Hyperbel ist, deren Hauptaxe in die Richtung der Axe der z fällt.

Es sei z. B. $r = 2^{cm}$, $c = 5^{cm}$ und $\beta = 1^{cm}$, so wird aus Gleichung (7)

$$25 x^2 - 4 z^2 = - 25 \quad . \quad (8)$$

Setzen wir in dieser Gleichung $x = 0$, so ergiebt sich $z^2 = {}^{25}/_4$, $z = {}^5/_2$ als Werth der Hauptaxe der Hyperbel und demnach reducirt sich die Gleichung (8) auf

$$\tfrac{25}{4} x^2 - z^2 = - \tfrac{25}{4},$$

woraus man ersieht, daß die Nebenaxe der fraglichen Hyperbel gleich 1 ist. Fig. 85 stellt den Kegel sammt der Durchschnittscurve für die Werthe $r = 2^{cm}$, $c = 5^{cm}$ und $\beta = 1^{cm}$ dar.

III. Die Gleichung der Durchschnittscurve des Umbrehungsellipsoids

$$B^2(x^2 + y^2) + A^2z^2 = A^2B^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

mit der Ebene

$$y = \beta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

welche der Ebene der xz parallel läuft, ergiebt sich, wenn man in Gleichung (9) β für y substituirt; es kommt alsdann

$$B^2x^2 + A^2z^2 = B^2(A^2 - \beta^2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

was offenbar die Gleichung einer Ellipse ist, deren große Axe gleich ist

$$\sqrt{A^2 - \beta^2},$$

während die kleine Axe der Ellipse ist

$$\frac{B}{A}\sqrt{A^2 - \beta^2}.$$

Für das Ellipsoid, welches Fig. 80 dargestellt ist, haben wir $A = 3^{cm}$, $B = 2^{cm}$. Wenn nun die mit der Ebene der xz parallel laufende schneidende Ebene um 2^{cm} von der Umbrehungsaxe des Ellipsoids entfernt, also $\beta = 2^{cm}$ ist, so erhalten wir für die beiden Axen der Durchschnittsellipse $\sqrt{5}$ und $^2/_3\sqrt{5}$.

IV. Man soll die Gestalt der Curven ermitteln, in welchen das Umbrehungshyperboloid

$$A^2z^2 - B^2(x^2 + y^2) = - A^2B^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

(siehe Fig. 82 §. 48) durch eine mit der Ebene der xz parallelen Ebene

$$y = \beta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

geschnitten wird. Setzt man in Gleichung (12) $y = \beta$, so kommt für die gesuchte Gleichung der Durchschnittscurve

$$A^2z^2 - B^2x^2 = - B^2(A^2 - \beta^2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

Für $\beta < A$ stellt diese Gleichung eine Hyperbel dar, deren Hauptaxe in die Richtung der Axe der x fällt. Für die Hauptaxe dieser Hyperbel ergiebt sich der Werth

$$\sqrt{A^2 - \beta^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

für die Nebenaxe aber

$$\frac{B}{A}\sqrt{A^2 - \beta^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

Für $\beta = A$ reducirt sich die Gleichung (14) auf

$$A^2z^2 = B^2x^2$$

$$z = \pm \frac{B}{A} x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

Diese Gleichung stellt ein System zweier geraden Linien dar, welche mit der Axe der x einen Winkel machen, dessen trigonometrische Tangente für die eine $+\frac{B}{A}$, für die andere aber $-\frac{B}{A}$ ist. Der Winkel der beiden geraden Linien wird durch die Axe der x halbirt.

Für $\beta > A$ wird das Glied auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens in Gleichung (14) positiv. Aendern wir in Gleichung (14) alle Vorzeichen, so kommt

$$B^2x^2 - A^2z^2 = - B^2(\beta^2 - A^2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

eine Gleichung, welche, so lange $\beta > A$, eine Hyperbel darstellt, deren Hauptaxe mit der Axe der z zusammenfällt. Die Hauptaxe dieser Hyperbel ist

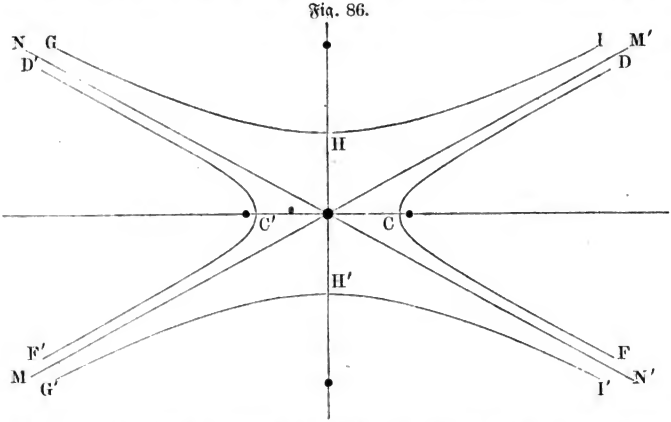
$$\sqrt{\beta^2 - A^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

die Nebenaxe aber

$$\frac{A}{B}\sqrt{\beta^2 - A^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

Aus der Betrachtung der Axenwerthe bei (15) und (16), so wie der bei (19) und (20) ergiebt sich, daß die Asymptoten sämmtlicher

Fig. 86.



Durchschnittshyperbeln denselben Winkel mit der Axe der x machen, nämlich einen Winkel, dessen trigonometrische Tangente gleich $\frac{B}{A}$ ist.

Für das in Fig. 82 dargestellte Umdrehungshyperboloid ist $A = 1{,}5^{cm}$, $B = 0{,}8^{cm}$, also 0,533 die trigonometrische Tangente, welche die Asymptoten sämmtlicher Durchschnittshyperbeln mit der Axe der x machen. In Fig. 86 ist MM' und NN' das den Werthen $A = 1{,}5$ und $B = 0{,}8$ entsprechende Asymptotensystem. Diese beiden Linien stellen zugleich den Durchschnitt des Hyperboloids mit einer Ebene dar, welche parallel mit der Umdrehungsaxe um $1{,}5^{cm}$ von derselben entfernt ist.

Die Hyperbel DCF, $D'C'F'$ entspricht dem Werthe $\beta = 1^{cm}$, während die Hyperbel GHJ, $G'H'J'$ dem Werthe $\beta = 2^{cm}$ entspricht; für die erstere ist die Hauptaxe $1{,}12^{cm}$, die Nebenaxe $0{,}597^{cm}$; für die Hyperbel GHJ, $G'H'J'$ ist die Hauptaxe $1{,}32^{cm}$, die Nebenaxe aber $2{,}475^{cm}$.

Die Kegelschnitte. Mit dem Namen der Kegelschnitte be- 51
zeichnet man die Durchschnittscurven eines (geraden) Kegels (von kreisförmiger Basis) und irgend einer ebenen Fläche. In den folgenden Zeilen sollen die Gleichungen dieser Curven entwickelt werden.

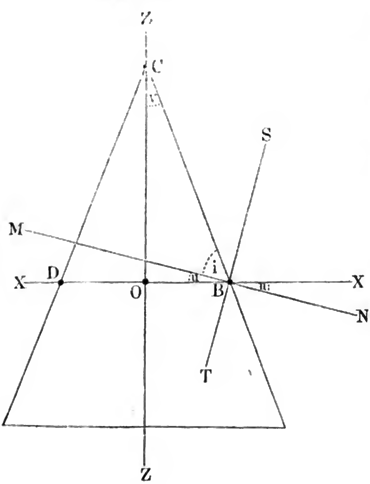
Nach §. 44 ist

$$(y^2 + x^2)\, c^2 = r^2 (z - c)^2 \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

die Gleichung eines geraden Kegels von kreisförmiger Basis.

In Fig. 87 ist der Durchschnitt dieses Kegels mit der Ebene der xz dargestellt. O ist der Anfangspunkt der Coordinaten; $OB = OD = r$ ist der Radius des Leitkreises; $CO = c$ ist die Höhe der Kegelspitze über der Ebene des Leitkreises, welche zugleich zur Ebene der xy genommen ist.

Fig. 87.



Der Kegel soll nun von einer Ebene durchschnitten werden, die wir als durch den Punkt B gehend und auf der Ebene der xz rechtwinkelig stehend annehmen wollen; diese Ebene schneidet die Ebene der xz in einer geraden Linie MN.

Um die Gleichung der Curve zu finden, in welcher die besprochene Ebene die Kegeloberfläche schneidet, ist es zweckmäßig, eine Transformation der Coordinaten in der Weise vorzunehmen, daß die schneidende Ebene selbst zu einer Coordinatenebene wird. Nehmen wir den Punkt B, Fig. 87, zum Anfangspunkt der neuen Coordinaten, die wir mit $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{z}$ bezeichnen wollen. — MN sei die Axe der $\mathfrak{x}$; ST, in der alten Ebene der xz rechtwinkelig auf MN liegend, sei die Axe der $\mathfrak{z}$ und die in B rechtwinkelig auf MN und ST stehende Linie sei die Axe der $\mathfrak{y}$. — Die Axe der $\mathfrak{y}$ ist also der Axe der y parallel.

Bezeichnen wir mit x, y und z die Coordinaten irgend eines Punktes, bezogen auf das erste Axensystem; mit $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{z}$ die Coordinaten desselben Punktes, bezogen auf das neue System, so finden zwischen den alten und den neuen Coordinaten folgende Beziehungen statt:

$$y = \mathfrak{y} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (a)$$

da ja die Ebene der xz mit der Ebene der $\mathfrak{x}\mathfrak{z}$ zusammenfällt. Ferner aber ist, analog den Gleichungen (4) in §. 24

$$x = r + \mathfrak{z}\,.\,sin.u + \mathfrak{x}\ cos.u \quad \ldots\ldots \quad (b)$$

$$z = \mathfrak{z}\ cos.u - \mathfrak{x}\ sin.u \quad \ldots\ldots\ldots \quad (c)$$

wenn man mit u den Winkel bezeichnet, welchen die Axe der $\mathfrak{x}$ mit der Axe der x macht. Substituirt man in Gleichung (1) für x, y und z ihre Werthe bei (b), (a) und (c), so kommt

$$[\mathfrak{y}^2 + (r + \mathfrak{z}\, sin.u + \mathfrak{z}\, cos.u)^2]\, c^2 = r^2 (\mathfrak{z}\, cos.u - \mathfrak{x}\, sin.u - c)^2 \quad . \quad (2)$$

Als Gleichung des Kegels, bezogen auf das zweite Axensystem, für welches die Gleichung der schneidenden Ebene (der Ebene der $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$) ist

$$\mathfrak{z} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Combinirt man die Gleichungen (2) und (3), so erhält man für die Gleichung der Durchschnittscurve

$$[\mathfrak{y}^2 + (r + \mathfrak{x}\, cos.u)^2]\, c^2 = r^2\, (c + \mathfrak{x}\, sin.u)^2 \quad \ldots \quad (4)$$

Da diese Gleichung in Beziehung auf $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ vom zweiten Grade ist, so ersieht man ohne Weiteres, daß der Durchschnitt des Kegels mit einer Ebene entweder eine Ellipse oder eine Parabel oder eine Hyperbel sein muß.

Um besser übersehen zu können, mit welcher dieser drei Curven man in bestimmten Fällen zu thun hat, wollen wir mit Gleichung (4) noch einige Umwandlungen vornehmen. Setzen wir den Abstand $CB = b$; bezeichnen wir den Winkel BCO, welchen die Generatrix mit der Axe des Kegels macht, mit v, so ist

$$r = b \,.\, sin.\, v$$
$$c = b \,.\, cos.\, v$$

und diese Werthe für r und c in Gleichung (4) gesetzt, giebt

$$[\mathfrak{y}^2 + (b\, sin.\, v + \mathfrak{x}\, cos.\, u)^2]\, cos.\, v^2 = (b\, cos.\, v + \mathfrak{x}\, sin.\, u)^2\, sin.\, v^2.$$

Entwickelt man diese Gleichung, so kommt

$$\mathfrak{y}^2\, cos.\, v^2 + \mathfrak{x}^2\, (cos.\, u^2\, cos.\, v^2 - sin.\, u^2\, sin.\, v^2)$$
$$+ 2\, b\mathfrak{x}\, sin.\, v \,.\, cos.\, v\, (cos.\, u\, cos.\, v - sin.\, u\, sin.\, v) = 0$$

oder

$$\mathfrak{y}^2\, cos.\, v^2 + \mathfrak{x}^2\, (cos.\, u\, cos.\, v - sin.\, u\, sin.\, v)\, (cos.\, u\, cos.\, v + sin.\, u\, sin.\, v)$$
$$+ b\mathfrak{x} \,.\, 2\, sin.\, v \,.\, cos.\, v \,.\, cos.\, (u + v) = 0$$

oder endlich

$$\mathfrak{y}^2\, cos.\, v^2 + \mathfrak{x}^2\, cos.\, (u + v)\, cos.\, (u - v) + b\mathfrak{x}\, sin.\, 2\, v\, cos.\, (u + v) = 0 \quad (5)$$

Bezeichnet man mit i den Winkel MBC, welchen die schneidende Ebene mit der Kegelkante CB macht, so ist, wie leicht aus der Fig. 87 zu ersehen ist,

$$i + u + v = 90^0,$$

also

$$u + v = 90^0 - i$$
$$cos.\, (u + v) = sin.\, i$$

und ferner

$$u - v = 90^0 - i - 2\, v,$$

also

$$cos.\, (u - v) = sin.\, (i + 2\, v).$$

Substituirt man diese Werthe von $cos.\, (u + v)$ und $cos.\, (u - v)$ in Gleichung (5), so kommt

$$\mathfrak{y}^2\, cos.\, v^2 + \mathfrak{x}^2\, sin.\, i\, sin.\, (i + 2\, v) + b\mathfrak{x}\, sin.\, 2\, v \,.\, sin.\, i = 0 \quad . \quad (6)$$

Diese Gleichung ist die Gleichung einer Ellipse, einer Parabel oder einer Hyperbel, je nachdem

$$1. \ldots i < 180^0 - 2\, v$$

oder

$$2. \ldots i = 180^0 - 2\, v$$

oder

$$3. \ldots i > 180^0 - 2\, v.$$

Erster Fall. Wenn Winkel MBC, Fig. 88 (a. f. S.), also $i < 180 - 2v$, so kann man setzen: $i = 180 - 2v - t$, also $i + 2v = 180 - t$ und $sin.\, (i + 2\, v) = sin.\, t$. Danach geht Gleichung (6) über in

$$\mathfrak{y}^2\, cos.\, v^2 + \mathfrak{x}^2\, sin.\, i\ \, sin.\, t + b\mathfrak{x}\ \, sin.\, i\ \, sin.\, 2\, v = 0.$$

Setzt man in dieser Gleichung

$$\mathfrak{x} = X - \frac{b\, sin.\, 2\, v}{2\, sin.\, t}$$

und

$$\mathfrak{y} = Y,$$

so geht sie über in

$$Y^2 (\cos. v)^2 + X^2 \sin. i \; \sin. t = \frac{b^2 (\sin. v)^2 \sin. i}{4 \sin. t} \quad . \; . \quad (7)$$

Fig. 88.

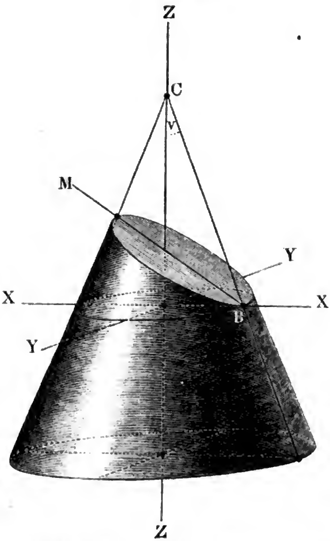
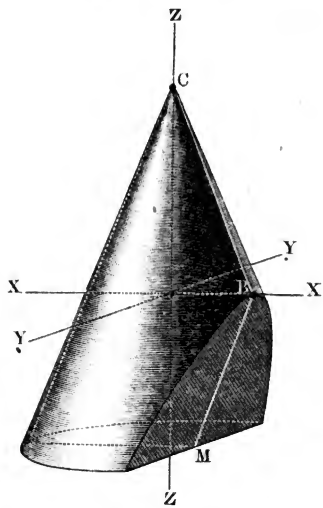


Fig. 89.



welches offenbar die Gleichung einer Ellipse ist; denn setzen wir

$$N . A^2 = (\cos. v)^2$$

$$N . B^2 = \sin. i \; \sin. t$$

$$N . A^2 B^2 = \frac{b^2 (\sin. v)^2 \sin. i}{4 \sin. t},$$

so ergiebt sich

$$N = \frac{4 (\sin. t)^2 . (\cos. v)^2}{b^2 (\sin. v^2)} .$$

Dividirt man mit diesem Werth von N jedes Glied der Gleichung (7), so geht dieselbe über in

$$\frac{b^2 (\sin. v)^2}{4 (\sin. t)^2} Y^2 + \frac{b^2 \sin. i \; (\sin. v)^2}{4 . \sin. t . (\cos. v)^2} X^2 = \frac{b^4 (\sin. v)^4 \sin. i}{4 . 4 . (\sin. t)^3 \; (\cos. v)^2} \quad (8)$$

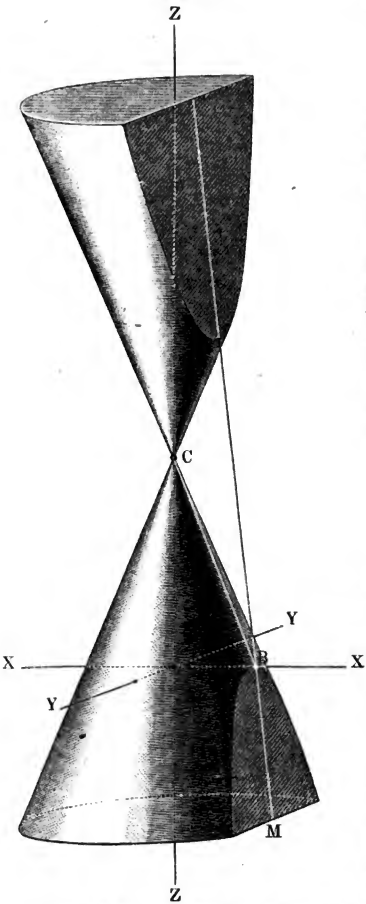
wir haben also mit einer Ellipse zu thun, für welche

$$A = \frac{b \, . \, sin. \, v}{2 \, sin. \, t}$$

und

$$B = \frac{b \, . \, sin. \, v \sqrt{sin. \, i}}{2 \, . \, cos. \, v \sqrt{sin. \, t}}.$$

Fig. 90.



Zweiter Fall. Wenn Winkel MBC also $i = 180 - 2v$ ist, wie in Fig. 89, so ist die durch B gelegte Schnittfläche mit der gegenüberliegenden Kegelkante CD, Fig. 87, parallel, oder mit anderen Worten, die schneidende Ebene macht mit der Kegelaxe einen Winkel, welcher gleich v, also gleich dem Winkel ist, welchen die Generatrix mit der Axe macht. Für diesen Fall ist $i + 2v = 180^0$, also $sin. (i + 2v) = 0$; danach reducirt sich die Gleichung (6) auf

$$\mathfrak{y}^2 \, cos. \, v^2 + b \, \mathfrak{x} \, sin. \, 2v \, sin. \, i = 0$$

$$\mathfrak{y}^2 = - \frac{b \; sin. \, 2v \, . \, sin. \, i}{cos. \, v^2} \mathfrak{x} \quad . \; (9)$$

Die Gleichung einer Parabel, welche sich von B aus nach der negativen Seite der $\mathfrak{x}$ hin erstreckt.

Dritter Fall. Für

$$i > 180 - 2v$$

(Winkel CBM, Fig. 90, größer als $180 - 2v$) können wir

$$i = 180 - 2v + t$$

setzen. Alsdann wird

$$i + 2v = 180^0 + t$$

und

$$sin. (i + 2v) = - sin. \, t.$$

Substituirt man in Gleichung (6) den Werth $- sin. \, t$ für $sin. (i + 2v)$, so gelangt man nach Durch-

führung ähnlicher Umwandlungen, wie sie im ersten Falle vorgenommen wurden, zu der Gleichung

$$\frac{b^2\,(sin.v)^2}{4\,(sin.t)^2}\,Y^2 - \frac{b^2\,.\,sin.\,i\,(sin.v)^2}{4\,sin.\,t\,(cos.\,v)^2}\,X^2 = -\frac{b^4\,.\,(sin.\,v)^4\,sin.\,i}{4\,.\,4\,.\,(sin.\,t)^3\,(cos.\,v)^2} \quad (10)$$

welches die Gleichung einer Hyperbel ist, deren Axen sind

$$A = \frac{b\;sin.\,v}{2\,.\,sin.\,t}$$

und

$$B = \frac{b\,.\,sin.\,v\,\sqrt{sin.\,i}}{2\,.\,cos.\,v\,\sqrt{sin.\,t}}.$$

In diesem Falle trifft die schneidende Fläche nicht bloß den unteren Theil des Kegels, sondern auch seine über die Spitze C hinausgehende Verlängerung desselben, wie man aus Fig. 90 ersieht, so daß man eine Curve von zwei getrennten Zweigen erhält.

So ist denn der Beweis geführt, daß der Durchschnitt eines Kegels und einer ebenen Fläche, je nach der Lage der schneidenden Ebene entweder eine Ellipse, oder eine Parabel oder eine Hyperbel ist, weshalb denn auch diese drei Curven unter dem gemeinschaftlichen Namen der Kegelschnitte zusammengefaßt wurden.

Alphabetisches Sachregister.

